ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ Ν. ΑΝΤΩΝΙΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΙΑΖΟΝΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Διδακτορική Διατριβή

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2000

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΕΤΗΡΙΔΑ ΑΡ ..... ΤΟΥ .... ΤΟΜΟΥ

ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ Ν. ΑΝΤΩΝΙΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΙΑΖΟΝΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

που εκπονήθηκε στον τομέα Αριθμητικής Ανάλυσης και Επιστήμης Η/Υ, του τμήματος μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης με την εποπτεία της συμβουλευτικής επιτροπής που ορίστηκε από τις 17/21-11-1994 και 55/17-4-2000 αποφάσεις του τμήματος και της οποίας μέλη είναι:

Τίτλος	Ονοματεπώνυμο	Υπογραφή
1. Καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Αντώνιος - Ιωάννης Βαρδουλάκης**	....
2. Αναπληρωτής Καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Συμεών Μποζαπαλίδης**	....
3. Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Χρόνης Μωυσιάδης**	....

Η επταμελής εξεταστική επιτροπή που ορκίστηκε για την κρίση της διδακτορικής διατριβής του Ευστάθιου Ν. Αντωνίου Μαθηματικού συνήλθε σε συνεδρίαση στο Πανεπιστήμιο της Θεσσαλονίκης 26/6/2000 όπου παρακολούθησε την υποστήριξη της διατριβής με τίτλο «ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΙΑΖΟΝΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ»

Η επιτροπή έκρινε ομόφωνα (επτά (7) ψήφοι υπέρ, μηδέν (0) κατά) ότι η διατριβή είναι πρωτότυπη και αποτελεί ουσιαστική συμβολή στην επιστήμη.

ΤΑ ΜΕΛΗ ΤΗΣ ΕΠΤΑΜΕΛΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

Τίτλος	**Ονοματεπώνυμο**	**Υπογραφή**
1. Καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Αντώνιος - Ιωάννης Βαρδουλάκης**	....
2. Καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Συμεών Μποζαπαλίδης**	....
3. Αναπληρωτής Καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Χρόνης Μωυσιάδης**	....
4. Καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Παναγιώτης – Χρήστος Βασιλείου**	....
5. Καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Κωνσταντίνος Καρανίκας**	....
6. Επίκουρος καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ	**Θωμάς Κυβεντίδης**	....
7. Καθηγητής του τμήματος Ηλεκτρ. Μηχανικών του ΑΠΘ	**Βασίλειος Πετρίδης**	....

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ο Ευστάθιος Ν. Αντωνίου γεννήθηκε στις 24/11/1972 στη Λάρισα. Τον Ιούνιο του 1990 αποφοίτησε από το 2^{ο} Γενικό Λύκειο Λάρισας με βαθμό «Λίαν Καλώς». Το ίδιο έτος και μετά από επιτυχία στις πανελλαδικές εξετάσεις εισήχθηκε στο τμήμα μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, από όπου και αποφοίτησε τον Οκτώβριο του 1994 με βαθμό «Λίαν Καλώς».

Το Νοέμβριο του 1994 έγινε δεκτός για την εκπόνηση διδακτορικής διατριβής στο τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ, υπό την επίβλεψη του καθηγητή Α.Ι.Γ. Βαρδουλάκη, με θέμα της διατριβής «Ανάλυση Ιδιαζόντων Γραμμικών Συστημάτων Διακριτού Χρόνου» (απόφαση Γ.Σ.: 20/6-2-1995). Κατά την διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής συμμετείχε ως νέος ερευνητής σε πληθώρα ερευνητικών και εκπαιδευτικών προγραμμάτων. Μεταξύ αυτών πρόγραμμα ΠΕΝΕΔ της ΓΓΕΤ με τίτλο *«Ανάπτυξη Λογισμικού για την Ανάλυση και Σύνθεση Πολυμεταβλητών Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου»* (2/96 – 2/98), πρόγραμμα μορφωτικών ανταλλαγών με την Τσεχία (χρηματοδότηση ΓΓΕΤ) (5/95 – 5/96), European Robust and Adaptive Control Network (EURACO) (9/94 – 10/96) και research assistant (EPRSC fellowship) στο Department of Applied Mathematics του Loughborough University της Αγγλίας (3/98-6/98).

Τα ενδιαφέροντα του κινούνται στο χώρο της Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων και ειδικότερα σε αλγεβρικές μεθόδους για ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων, ενώ παράλληλα ασχολείται επαγγελματικά με την ανάπτυξη software με κύριο προσανατολισμό τις δικτυακές εφαρμογές και το internet.

«Η έγκριση της παρούσης διδακτορικής διατριβής υπό του τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης δεν αποδηλοί αποδοχή των γνωμών του συγγραφέως»
(Ν. 5343/1932, αρθρ. 202, παραγρ. 2)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι τα ιδιάζοντα γραμμικά συστήματα διακριτού χρόνου. Η περίπτωση των πρωτοβάθμιων κανονικών συστημάτων έχει μελετηθεί στο παρελθόν από διάφορους συγγραφείς, κυρίως σε επίπεδο αλγεβρικής και γεωμετρικής ανάλυση. Κύριος στόχος της παρούσας έρευνας είναι η επέκταση των αποτελεσμάτων αυτών προς τρεις κατευθύνσεις. Συγκεκριμένα η ανάλυση μη-κανονικών πρωτοβάθμιων ιδιαζόντων συστημάτων, η μελέτη της δομής του χώρου λύσεων (συμπεριφορά) κανονικών αυτοπαλλίνδρομων (AR) παραστάσεων και η μέθοδος επίλυσης αυτοπαλλίνδρομων παραστάσεων κινούμενου μέσου (ARMA) με τη χρήση του θεμελιώδους πίνακα. Η δομή των χώρων λύσεων που μελετήθηκαν συσχετίστηκε άμεσα με την αλγεβρική δομή των πολυωνυμικών πινάκων που περιγράφουν τα αντίστοιχα συστήματα και ιδιαίτερο βάρος δόθηκε στην αλγεβρική δομή των τελευταίων στο άπειρο.

ABSTRACT

The subject of the present PhD thesis is the study of singular linear discrete time systems. The regular first-order case has been studied by several authors in the past, mainly in an algebraic and geometric analysis level. The main objective of the present study is to extend these results towards three directions. In particular, the analysis of non-regular first-order singular systems, the study of the structure of the solution space (behavior) of auto-regressive (AR) representations and a solution method for auto-regressive moving average (ARMA) representation using the fundamental matrix sequence. The structure of the solution spaces has been directly connected to the algebraic structure of the polynomial matrices describing the corresponding systems while special attention has been given on the infinite algebraic structure of the matrices involved.

Περιεχόμενα

Κεφαλαιο 1

Μαθηματικό Υπόβαθρο

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις βασικές αλγεβρικές και γεωμετρικές έννοιες που απαιτούνται για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Το περιεχόμενο του μαθηματικού αυτού υποβάθρου περιλαμβάνει από απλές εισαγωγικές έννοιες, ως εξειδικευμένα θέματα όπως η αλγεβρική δομή πολυωνυμικών ή ρητών πινάκων στο άπειρο. Οι μεν πρώτες δίνονται απλά για ευκολία αναφοράς του αναγνώστη, ενώ τα πιο εξειδικευμένα θέματα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά ώστε να μην είναι αναγκαία η αναδρομή σε σχετικά πρόσφατη ή δυσεύρετη βιβλιογραφία.

1.2 Απεικονίσεις

Μια από τις βασικότερες αλγεβρικές έννοιες είναι αυτή της απεικόνισης. Έστω δύο αυθαίρετα σύνολα $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, τότε

Ορισμος 1.1 *Ονομάζουμε απεικόνιση (mapping) f με πεδίο ορισμού ή σύνολο αφετηρίας $\mathcal{X}$ (domain) και πεδίο τιμών ή σύνολο άφιξης $\mathcal{Y}$ (codomain), τον κανόνα αντιστοίχισης κάθε στοιχείου $x \in \mathcal{X}$ σε ένα και μόνο ένα στοιχείο $y \in \mathcal{Y}$. Συμβολικά γράφουμε*

$$f : \mathcal{X} \ni x \mapsto y = f(x) \in \mathcal{Y}$$

όπου το σύμβολο $f(x)$ συμβολίζει την εικόνα ή τιμή του $x \in \mathcal{X}$ μέσω της απεικόνισης f.

Προφανώς για την πλήρη περιγραφή μιας απεικόνισης απαιτείται η γνώση των τιμών όλων των στοιχείων του συνόλου $\mathcal{X}$. Το σύνολο που περιέχει μια τέτοια πλήρη περιγραφή της απεικόνισης f, ονομάζεται **γράφημα** της συνάρτησης και ορίζεται ως το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών της μορφής $(x, f(x))$, δηλ.

$$\mathcal{G} = \{(x, f(x)), x \in \mathcal{X}\}$$

Ορισμος 1.2 *Έστω $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. Τότε το σύνολο*

$$f(\mathcal{A}) := \{y \in \mathcal{Y} : \exists x \in \mathcal{A} \text{ έτσι ώστε } y = f(x)\} \subset \mathcal{Y}$$

ονομάζεται εικόνα του συνόλου $\mathcal{A}$ μέσω της f. Στην ειδική περίπτωση που $\mathcal{A} \equiv \mathcal{X}$ το σύνολο $f(\mathcal{X})$ ονομάζεται απλά εικόνα της f και συχνά συμβολίζεται $R(f)$, $\mathrm{Im}\, f$ ή $f\mathcal{X}$.

Ορισμος 1.3 *Έστω $\mathcal{B} \subset \mathcal{Y}$. Τότε το σύνολο*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{x \in \mathcal{X} : \exists y \in \mathcal{B} \text{ έτσι ώστε } y = f(x)\} \subset \mathcal{X}$$

ονομάζεται αντίστροφη εικόνα του συνόλου $\mathcal{B}$ μέσω της f.

Ορισμος 1.4 *Η αντίστροφη εικόνα του στοιχείου 0 ονομάζεται πυρήνας (kernel) της απεικόνισης*

$$\ker f := f^{-1}(0) = \{x \in \mathcal{X} : f(x) = 0\} \subset \mathcal{X}$$

Ορισμος 1.5 *Μια απεικόνιση $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ ονομάζεται "ένα προς ένα", μονομορφισμός (monomorphism) ή ένεση (injection) εάν και μόνο εάν κάθε δύο διαφορετικά στοιχεία x_1, x_2 του $\mathcal{X}$, απεικονίζονται σε δύο διαφορετικά στοιχεία του $\mathcal{Y}$. Δηλαδή*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X} \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή ισοδύναμα

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X} \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ορισμος 1.6 *Μια απεικόνιση $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ ονομάζεται "επί", επιμορφισμός (epimorphism) ή έφεση (surjection) εάν και μόνο εάν*

$$f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$$

Ορισμος 1.7 *Μια απεικόνιση $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ ονομάζεται ισομορφισμός (isomorphism) ή αμφίεση (bijection) εάν και μόνο εάν είναι ταυτόχρονα "ένα προς ένα" και "επί".*

1.3 Σχέσεις ισοδυναμίας

Έστω δύο σύνολα $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ και έστω $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Κάθε υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ονομάζεται σχέση από το $\mathcal{X}$ στο $\mathcal{Y}$. Αν $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ τότε η R ονομάζεται σχέση πάνω στο $\mathcal{X}$. Ειδικότερα μια σχέση R πάνω στο $\mathcal{X}$ ονομάζεται ισοδυναμία εάν και μόνο εάν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- **Ανακλαστική ιδιότητα** : $(x, x) \in R, \forall x \in \mathcal{X}$
- **Συμμετρική ιδιότητα :** $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R, \forall x, y \in \mathcal{X}$
- **Μεταβατική ιδιότητα :** $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R, \forall x, y, z \in \mathcal{X}$

Δεδομένων των παραπάνω συχνά χρησιμοποιούμε τον συμβολίσμο $x \sim_R y$, αντί του $(x, y) \in R$. Η σχέση ισοδυναμίας R ορίζει στο σύνολο $\mathcal{X}$, υποσύνολα που αποτελούνται από στοιχεία ισοδύναμα μεταξύ τους, που ονομάζονται κλάσεις ισοδυναμίας (equivalence classes). Η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου x ορίζεται

$$[x]_R := \{y \in \mathcal{X} : x \sim_R y\}$$

Το στοιχείο x ονομάζεται αντιπρόσωπος της κλάσης $[x]_R$. Είναι προφανές ότι $[x]_R = [y]_R$ εάν και μόνο εάν $x \sim_R y$ όπως και ότι $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ εάν και μόνο εάν $x \nsim_R y$. Το **σύνολο πηλίκο** του $\mathcal{X}$ με την R, συμβολίζεται με $\mathcal{X}/R$ και είναι το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζει η R στο $\mathcal{X}$.

1.4 Διανυσματικοί χώροι

Έστω ένα σύνολο V και ένα αντιμεταθετικό σώμα K.

Ορισμος 1.8 *Το σύνολο V ονομάζεται διανυσματικός χώρος (vector space) (και τα στοιχεία του V διανύσματα) πάνω από το σώμα K, αν ορίζονται σε αυτό η πράξη της πρόσθεσης $(+)$ μεταξύ των στοιχείων του και ένας βαθμωτός πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ μεταξύ ενός στοχείου του V και ενός στοιχείου του K, με τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in V$ (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)
2. $\exists\, 0 \in V : x + 0 = 0 + x = x\,, \forall x \in V$ (Μηδενικό διάνυσμα)
3. $\forall x \in V, \exists(-x) \in V : x + (-x) = 0 = (-x) + x$ (Αντίθετο)
4. $x + y = y + x\; \forall x, y \in V$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης)
5. $\exists\, 1 \in K : 1 \cdot x = x, \forall x \in V$ (Μοναδιαίο στοιχείο του σώματος K)
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x, \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in K$ (Μικτή προσεταιριστική ιδιότητα)
7. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in K$ (Επιμερισμός του βαθμωτού πολ/σμού ως προς την πρόσθεση στο K)

8. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \forall x, y \in V, \forall \lambda \in K$ (Επιμερισμός του βαθμωτού πολ/σμού ως προς την πρόσθεση στο V)

Σε ότι ακολουθεί το σώμα K είναι το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, οπότε οι αντίστοιχοι διανυσματικοί χώροι ονομάζονται πραγματικοί. Κάθε υποσύνολο του V που είναι το ίδιο διανυσματικός χώρος ονομάζεται υποχώρος του V.

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ονομάζεται **γραμμικά ανεξάρτητο** εάν-ν η σχέση

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ldots \lambda_n x_n = 0$$

συνεπάγεται

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Σε αντίθετη περίπτωση τα διανύσματα ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένα**. Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ παράγει ένα υποχώρο U του V εάν-ν

$$\forall x \in U, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ldots \lambda_n x_n$$

Ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται βάση ενός διανυσματικού χώρου εάν-ν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον χώρο. Ένας διανυσματικός χώρος V ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης εάν-ν το πλήθος των διανυσμάτων μιας βάσης του είναι πεπερασμένο, καθώς αποδεικνύεται ότι όλες οι βάσεις του χώρου αυτού περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων. Το πλήθος αυτό ονομάζεται διάσταση του V και συμβολίζεται $\dim V$. Ορίζουμε $\dim\{0\} = 0$.

Ορίζουμε το άθροισμα δύο υποχώρων U, W του V ώς

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

Στην περίπτωση που κάθε στοιχείο του U ειναι γραμμικά ανεξάρτητο με κάθε στοιχείο του W το άθροισμα των δύο υποχώρων ονομάζεται ευθύ και συμβολίζεται $U \oplus W$. Αποδεικνύεται ότι

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$$

ειδικότερα

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$

αφού $U \cap W = \{0\}$.

1.5 Εσωτερικά γινόμενα και νόρμες διανυσματικών χώρων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε συνοπτικά τις έννοιες του εσωτερικού γινομένου και της νόρμας διανύσματων και πινάκων.

Ορισμος 1.9 *Ενα* ***εσωτερικό γινόμενο*** *σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο V είναι μία απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ (ή αντίστοιχα στο $\mathbb{R}$) η οποία απεικονίζει κάθε δύο διανύσματα $x, y \in V$ σε ένα μιγαδικό αριθμό (τον οποίο συμβολίζουμε με) $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ και η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

1. $\forall x, y, z \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} : \langle x, \alpha_1 y + \alpha_2 z\rangle = \alpha_1 \langle x, y\rangle + \alpha_2 \langle x, z\rangle$ *(γραμμικότητα)*
2. $\forall x, y \in V : \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$ [1] *(συμμετρία)*
3. $\forall x \in V : \langle x, x\rangle \geq 0$ *(θετικότητα)*
4. $\forall x \in V : \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Στην περίπτωση αυτή η συνθήκη 2 του παραπάνω ορισμού γράφεται $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$. Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο ο οποίος έχει πεπερασμένη διάσταση ονομάζεται *Ευκλείδιος χώρος*.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου είναι η παρακάτω:

Θεωρημα 1.10 *(ανισότητα* ***Cauchy-Schwartz****). Έστω V μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε για κάθε $x, y \in V$* [2] *έχουμε ότι*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \tag{1.1}$$

Η έννοια της νόρμας είναι σημαντική αν θέλουμε να ορίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι δύο διανύσματα είναι το "ένα κοντά στο άλλο". Ειδικότερα η έννοια της νόρμας ενός διανύσματος είναι αναγκαία για τον ορισμό της σύγκλισης σε ένα διανυσματικό χώρο, την οποία θα εισάγουμε στην επόμενη παράγραφο. Στην συνέχεια περιγράφουμε τις ιδιότητες τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί η νόρμα ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου (τις ίδιες ιδιότητες δηλαδή τις οποίες θα πρέπει να έχει ένα 'μήκος').

Ορισμος 1.11 *Μία* ***νόρμα*** *ή* ***μετρική*** *σε ένα διανυσματικό χώρο V είναι μία απεικόνιση $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα $x \in V$ σε ένα πραγματικό αριθμό (τον οποίο συμβολίζουμε με) $\|x\|$ και ο οποίος ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

1. $\forall x \in V : \|x\| \geq 0$ *και* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(θετικότητα)*
2. $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *(γραμμικότητα)*
3. $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(τριγωνική ανισότητα)*

[1] Αν $x = a + jb \in \mathbb{C}$ τότε $x^* = a - jb \in \mathbb{C}$ είναι ο *συζυγής* του x.
[2] $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

Ένας διανυσματικο:ς χώρος V στον οποίο έχουμε ορίσει μια νόρμα ονομάζεται **μετρικός διανυσματικός χώρος**.

Αν

$$x= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

τότε η συνάρτηση

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{x} = \sqrt{x^* x}$$

αποτελεί νόρμα στον $\mathbb{C}^n$ η οποία λέγεται **Ευκλείδεια νόρμα**. Άλλες νόρμες τις οποίες μπορούμε να ορίσουμε στον $\mathbb{C}^n$ είναι οι

$$\|x\|_1 := |x_1| + \ldots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 := \|x\|$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,2,\ldots,n} \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Αν σαν διανυσματικό χώρο V θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{C}^{\ltimes\times\ltimes}$ των πινάκων $n \times n$ με στοιχεία στό σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ τότε η νόρμα $\|A\|$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\ltimes\times\ltimes}$ ορίζεται:

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{1.2}$$

και μία συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι η

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \tag{1.3}$$

Από τον ορισμό (1.2) της νόρμας $\|A\|$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\ltimes\times\ltimes}$ βλέπουμε ότι νόρμα $\|A\|$ του A ορίζεται μέσω της νόρμας $\|x\|$ του x. Για διαφορετική $\|x\|$ έχουμε διαφορετική $\|A\|$. π.χ. αν χρησιμοποιήσουμε την $\|x\|_1$ τότε

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,\ldots,n} (|a_{1j}| + |a_{2j}| + ... + |a_{nj}|)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την $\|x\|_2$ τότε

$$\|A\|_2 = (\lambda_{\max}(A^* A))^{1/2}$$

όπου A^* είναι ο συζυγής ανάστροφος του A και $\lambda_{\max}(A^*A)$ συμβολίζει την μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα A^*A.

Αν χρησιμοποιήσουμε την $\|x\|_\infty$ τότε

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

Οι νόρμα ενός πίνακα έχει τις εξής ιδιότητες

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

οι οποίες προκύπτουν απο το ότι για κάθε x:

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\,\|x\|$$

και

$$\|ABx\| \leq \|A\| \, \|Bx\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|x\|$$

Όπως είναι αναμενόμενο το εσωτερικό γινόμενο και η νόρμα σε ένα διανυσματικό χώρο είναι έννοιες στενά συνδεδεμένες. Όταν σε ένα διανυσματικό χώρο έχουμε ορίσει ένα εσωτερικό γινόμενο τότε υπάρχει εύκολος τρόπος να ορίσουμε και μία νόρμα.

Λημμα 1.12 *Δεδομένου ενός εσωτερικού γινομένου σε ένα διανυσματικό χώρο V, μπορούμε να ορίσουμε την νόρμα $\|x\|$ ενός διανύσματος $x \in V$ μέσω της $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$*

Το παραπάνω λήμμα δείχνει ότι όταν ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο τότε αυτομάτως είναι εφοδιασμένος και με μία νόρμα ή όπως λέμε είναι και **μετρικός χώρος**. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Κάθε μετρικός χώρος, κάθε δηλαδή διανυσματικός χώρος στον οποίο έχουμε ορίσει μία νόρμα, δεν δίνει αυτόματα λαβή σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

1.6 Γραμμικές απεικονίσεις - πίνακες

Έστω V και W δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης με $\dim V = n$ και $\dim W = m$ αντίστοιχα. Μια απεικόνιση $f : V \mapsto W$ ονομάζεται γραμμική εάν και μόνο εάν

1. $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in V$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Δεδομένης μιας βάσης του χώρου V και μιας βάσης του W αντίστοιχα, η απεικόνιση f μπορεί να παρασταθεί με ένα πραγματικό πίνακα A διαστάσεων $m \times n$. Ονομάζουμε τάξη ($rank$) ενός πίνακα το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών ή γραμμών του πίνακα. Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \dim f(V) &= rank A \\ \dim \ker f &= n - rank A \end{aligned}$$

Η απεικόνιση f είναι μονομορφισμός (ένεση) εάν-ν $\ker f = \{0\}$ ή ισοδύναμα $rank A = n$ (πλήρης τάξη στηλών). Αντίστοιχα η f είναι επιμορφισμός (έφεση) εάν-ν $\dim f(V) = m$ ή ισοδύναμα $rank A = m$ (πλήρης τάξη γραμμών). Στην περίπτωση που $n = m = rank A$ η f είναι ισομορφισμός, οπότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Δύο ισοδιάστατοι χώροι (πεπερασμένης διάστασης) είναι πάντα ισόμορφοι, αφού σε κάθε περίπτωση μπορούμε να εντοπίσουμε μια απεικόνιση με τις παραπάνω ιδιότητες.

Δύο τετράγωνοι πίνακες A, B ονομάζονται όμοιοι εάν-ν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$B = P^{-1} A P$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η σχέση ομοιότητας πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η γεωμετρική ερμηνεία της ομοιότητας είναι η εξής: έστω B_1, B_2 δύο βάσεις του χώρου V και P ο πίνακας μετάβασης από την B_1 στην B_2. Τότε οι πίνακες A, B είναι όμοιοι εάν-ν παριστάνουν την ίδια απεικόνιση f ώς προς τις δύο βάσεις αντίστοιχα. Δηλαδή κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η ομοιότητα στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων περιέχει διαφορετικές παραστάσεις της ίδιας γραμμικής απεικόνισης για τις διάφορες βάσεις του V.

Έστω ένας τετράγωνος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε ένα διάνυσμα x ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του A εάν-ν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε

$$Ax = \lambda x$$

Ο αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του πίνακα A. Το σύνολο των ιδιοτιμών του A ονομάζεται φάσμα του A. Για να εντοπίσουμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα γράφουμε την παραπάνω σχέση σαν γραμμικό σύστημα της μορφής

$$(\lambda I - A)x = 0$$

οπότε πρέπει $\det(\lambda I - A) = 0$. Το πολυώνυμο

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$$

ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Οι ρίζες του πολυωνύμου $a(\lambda)$ δεν είναι άλλες από τις ιδιοτιμές του A. Αν λ_i είναι οι διακεκριμένες ρίζες του $\alpha(\lambda)$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$a(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}$$

με $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = n$. Οι δείκτες μ_i ονομάζονται αλγεβρικές πολλαπλότητες των αντίστοιχων ιδιοτιμών λ_i. Το σύνολο των διανυσμάτων που ικανοποιούν τη σχέση $Ax = \lambda_i x$ ονομάζεται ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, ενώ η διάσταση του χώρου αυτού ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_i. Η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής είναι μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής της πολλαπλότητας.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A ικανοποιεί την παρακάτω πολύ σημαντική ιδιότητα που είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως θεώρημα Cayley - Hamilton:

$$a(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots a_0 I = 0$$

Ένα επίσης πολύ σημαντικό συμπέρασμα που αφορά την φασματική δομή ενός πίνακα A, σε σχέση με την ομοιότητα των πινάκων είναι το παρακάτω: το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές του πίνακα A μένουν αναλλοίωτα κάτω από τους μετασχηματισμούς ομοιότητας. Πράγματι αν $B = P^{-1}AP$ τότε

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \det(\lambda I - B) \\ &= \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a(\lambda)(\det(P))^{-1}\det(P) \\ &= a(\lambda) \end{aligned}$$

είναι προφανές ότι οι ιδιοτιμές των δύο πινάκων θα ταυτίζονται. Η σημαντικότητα του παραπάνω αποτελέσματος έγκειται στο γεγονός ότι η φασματική δομή ανάγεται από ιδιότητα πινάκων σε ιδιότητα της αντίστοιχης γραμμικής απεικόνισης. Κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η ομοιότητα πινάκων περιέχει ένα μπλοκ διαγώνιο πίνακα που ονομάζεται Jordan κανονική μορφή και προβάλλει τη φασματική δομή της κλάσης. Αποδεικνύεται ότι κάθε τετράγωνος πίνακας A είναι όμοιος με ένα πίνακα της παρακάτω μορφής

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_v \end{bmatrix}$$

όπου v είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών του A. Οι πίνακες J_i έχουν την παρακάτω λεπτομερέστερη δομή:

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{i,m_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_i}, i = 1, 2, \ldots, v$$

όπου μ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i και m_i η γεωμετρική της πολλαπλότητα. Οι πίνακες J_{ij} ονομάζονται Jordan blocks και έχουν τη μορφή:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_{ij} \times p_{ij}}$$

όπου $\mu_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}$.

Η κανονική μορφή του Jordan είναι μοναδική (μέχρι αναδιάταξης των Jordan blocks) για κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η ομοιότητα πινάκων και χαρακτηρίζει πλήρως τη φασματική δομή των πινάκων που περιέχονται σε αυτή. Παρόλη τη δυσκολία που παρουσιάζει ο υπολογισμός της Jordan μορφής ειδικά για μεγάλους πίνακες, η χρησιμότητα της είναι μεγάλη τόσο σε θεωρητικό όσο και πρακτικό επίπεδο. Μερικές από τις πρακτικές εφαρμογές της περιλαμβάνουν τον υπολογισμό του εκθετικού πίνακα e^A και της αυθαίρετης δύναμης A^k. Στη θεωρία, εξαιτίας του γεγονότος ότι η Jordan μορφή προβάλλει καθάρα τη φασματική δομή του πίνακα, η χρήση του επιστρατεύεται στις αποδείξεις πολλών αποτελεσμάτων σε προβλήματα ανάλυσης και σύνθεσης συστημάτων (π.χ. μελέτη ευστάθειας).

Σημειώνουμε ότι η Jordan μορφή δεν είναι απαραίτητα πραγματικός πίνακας αφού οι ιδιοτιμές του A μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί. Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι πραγματικός είναι δυνατόν να αναδιατάξουμε την Jordan μορφή με μετασχηματισμούς ομοιότητας, ώστε να πετύχουμε μια παρόμοια block διαγώνια μορφή με αυτή του Jordan, με πραγματικά στοιχεία.

1.7 Πολυωνυμικοί πίνακες

Έστω $\mathbb{R}[s]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}[s]$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}^{m\times n}[s]$. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού ονομάζονται πολυωνυμικοί πίνακες.

Έστω $A(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$ με μέγιστο βαθμό του s μεταξύ όλων των στοιχείων ίσο με q. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A(s) = A_q s^q + A_{q-1} s^{q-1} + \ldots + A_0$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}^{m\times n}, i = 0, 1, \ldots, q$.

Ορισμος 1.13 *Ο βαθμός ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$ ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός μεταξύ των βαθμών των ελλασόνων οριζουσών τάξης* $\min(p, m)$. ■

Στην περίπτωση που ο $A(s)$ είναι τετράγωνος ο βαθμός του προφανώς ισούται με το βαθμό της ορίζουσας του.

Ορισμος 1.14 *Ένας τετράγωνος πολυωνυμικός πίνακας $A(s)$ ονομάζεται **κανονικός** (regular) εάν-ν*

$$\det A(s) \neq 0 \text{ για σχεδόν}^1 \text{ κάθε } s \in \mathbb{C}$$

σε αντίθετη περίπτωση ο $A(s)$ ονομάζεται μη-κανονικός (non-regular). ■

Προφανώς κάθε κανονικός πίνακας είναι και αντιστρέψιμος.

[1] Η φράση "για σχεδόν κάθε" ερμηνεύεται ως "για κάθε εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων".

Ορισμος 1.15 *Ένας κανονικός πολυωνυμικός πίνακας ονομάζεται* ***μονομετρικός*** *(unimodular) εάν-ν ο αντίστροφος του είναι επίσης πολυωνυμικός πίνακας. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι*

$$A(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}[s] \text{ μονομετρικός} \Leftrightarrow \det A(s) = c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

■

Μια βασική σχέση ισοδυναμίας που αφορά την αλγεβρική δομή των πολυωνυμικών πινάκων είναι αυτή της μονομετρικής ισοδυναμίας.

Ορισμος 1.16 *Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A(s), B(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$ ονομάζονται* ***μονομετρικά ισοδύναμοι*** *στο $\mathbb{C}$ εάν-ν υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}[s]$ και $V(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}[s]$, τέτοιοι ώστε*

$$B(s) = U(s)A(s)V(s)$$

Στην ειδική περίπτωση $B(s) = U(s)A(s)$ ($B(s) = A(s)V(s)$) οι πίνακες $A(s), B(s)$ ονομάζονται ***αριστερά (δεξιά) μονομετρικά ισοδύναμοι****.* ■

Εύκολα μπορεί να επιβεβαιωθεί οτί η παραπάνω σχέση είναι όντως μια σχέση ισοδυναμίας. Παρατηρήστε επίσης ότι η μονομετρική ισοδυναμία αφήνει το βαθμό του πίνακα αναλλοίωτο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κανονική μορφή των πολυωνυμικών πινάκων που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

Θεωρημα 1.17 *Κάθε πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$ είναι μονομετρικά ισοδύναμος με ένα διαγώνιο πολυωνυμικό πίνακα της μορφής:*

$$S^{\mathbb{C}}_{A(s)} := \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_r(s) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$$

όπου $\varepsilon_i(s) \in \mathbb{R}[s]$. Ο πίνακας $S^{\mathbb{C}}_{A(s)}$ ονομάζεται ***Smith μορφή*** *του πίνακα $A(s)$ στο $\mathbb{C}$ και τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$* ***αναλλοίωτα πολυώνυμα*** *(invariant polynomials) του $A(s)$. Επιπλέον τα $\varepsilon_i(s)$ έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα και έχουν την ιδιότητα $\varepsilon_i(s)|\varepsilon_{i+1}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$ (δηλ. το $\varepsilon_i(s)$ διαιρεί το $\varepsilon_{i+1}(s)$). Τα $\varepsilon_i(s)$ μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από την σχέση:*

$$\varepsilon_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}, i = 1, 2, \ldots, r$$

όπου $\Delta_0(s) := 1$, $\Delta_i(s) := \gcd\{\text{ελλάσονων οριζουσών τάξης } i \text{ του } A(s)\}$ ($\gcd\{.\}$ συμβολίζει το μέγιστο κοινό διαιρέτη (greatest common divisor)). ■

Οι ρίζες των πολυωνύμων $\varepsilon_i(s)$ ονομάζονται (πεπερασμένα) **μηδενικά** του πίνακα $A(s)$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η Smith μορφή είναι μοναδική για κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η μονομετρική ισοδυναμία.

Αν $\lambda_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \ldots, v$ είναι τα (διαφορετικά μεταξύ τους) μηδενικά του $A(s)$, τότε τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ μπορούν να γραφούν

$$\varepsilon_i(s) = \prod_{j=1}^{v}(s - \lambda_j)^{m_{ij}}$$

όπου οι εκθέτες m_{ij} έχουν την ιδιότητα

$$0 \leq m_{1j} \leq m_{2j} \leq \ldots \leq m_{rj},\ j = 1, 2, \ldots, v$$

Οι όροι $(s - \lambda_j)^{m_{ij}}$ ονομάζονται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες** (elementary divisors) του πίνακα $A(s)$.

Έστω ότι ο πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$ είναι τετράγωνος και αντιστρέψιμος. Ένα ζεύγος πινάκων $X_j \in \mathbb{R}^{r\times m_i}$, $J_j \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}$, όπου ο J_j είναι στην Jordan κανονική μορφή που αντιστοιχεί σε ένα μηδενικό λ_j πολλαπλότητας $m_j = \sum\limits_{i=1}^{r} m_{ij}$, ονομάζεται πεπερασμένο φασματικό ζεύγος (Finite Spectral Pair) [5] του $A(s)$ που αντιστοιχεί στο λ_j αν και μόνο αν

$$\sum_{k=0}^{q} A_k X_j J_j^k = 0 \quad \text{και} \quad rank \begin{bmatrix} X_j \\ X_J J_j \\ \vdots \\ X_J J_j^{m_j-1} \end{bmatrix} = m_j \tag{1.4}$$

Ο πίνακας J_j αποτελείται από Jordan blocks μεγέθους ίσο με τις μερικές πολλαπλότητες m_{ij} του λ_j.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_v$ όλες οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του $A(s)$ και (X_j, J_j)τα αντίστοιχα φασματικά τους ζεύγη. Ο συνολικός αριθμός πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετων του $A(\sigma)$ ισούται με τον βαθμό της ορίζουσας του , δηλ. $n = \deg(\det A(s)) = \sum_{j=1}^{v} m_j$. Το ζεύγος πινάκων

$$\begin{aligned} X_F &= [X_1, X_2, ..., X_p] \in \mathbb{R}^{r\times n} && (1.5) \\ J_F &= diag\{J_1, J_2, ..., J_p\} \in \mathbb{R}^{n\times n} && (1.6) \end{aligned}$$

ονομάζεται πεπερασμένο ιδιοζεύγος (Finite Eigenpair) [5] του $A(s)$ και ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$\sum_{k=0}^{q} A_k X_F J_F^k = 0, \quad rank \begin{bmatrix} X_F \\ X_F J_F \\ \vdots \\ X_F J_F^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{1.7}$$

1.8 Ρητοί πίνακες

Το σώμα των ρητών συναρτήσεων ορίζεται ως το σύνολο των πηλίκων πολυωνυμικών συναρτήσεων, δηλ.

$$\mathbb{R}(s) = \{t(s) : t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \in \mathbb{R}[s] \text{ με } d(s) \not\equiv 0\}$$

Αντίστοιχα το σύνολο των $m \times n$ πίνακων με στοιχεία από το $\mathbb{R}(s)$ ονομάζονται ρητοί πίνακες και συμβολίζεται με $\mathbb{R}^{m\times n}(s)$. Προφανώς το σύνολο των $m \times n$ πολυωνυμικών πινάκων περιέχεται στο $\mathbb{R}^{m\times n}(s)$.

Η μονομετρική ισοδυναμία μπορεί εύκολα να επεκταθεί στο σώμα των ρητών πινάκων κατά φυσικό τρόπο, ως εξής:

Ορισμος 1.18 *Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A(s), B(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}(s)$ ονομάζονται* ***μονομετρικά ισοδύναμοι*** *στο $\mathbb{C}$ εάν-ν υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}[s]$ και $V(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}[s]$, τέτοιοι ώστε*

$$B(s) = U(s)A(s)V(s)$$

Στην ειδική περίπτωση $B(s) = U(s)A(s)$ ($B(s) = A(s)V(s)$) οι πίνακες $A(s), B(s)$ ονομάζονται ***αριστερά (δεξιά) μονομετρικά ισοδύναμοι****.* ■

Αντίστοιχα η κανονική Smith μορφή επεκτείνεται στα πλαίσια της μονομετρικής ισοδυναμίας για ρητούς πίνακες στην λεγόμενη Smith - McMillan μορφή. Δίνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεωρημα 1.19 *Κάθε ρητός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}(s)$ είναι μονομετρικά ισοδύναμος με ένα διαγώνιο πολυωνυμικό πίνακα της μορφής:*

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}} := \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}(s)$$

*όπου $\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$. Ο πίνακας $S^{\mathbb{C}}_{A(s)}$ ονομάζεται **Smith - McMillan μορφή** του πίνακα $A(s)$ στο $\mathbb{C}$, ενώ τα $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$ ονομάζονται **αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις** του $A(s)$. Επιπλέον τα $\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$ έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ τους και έχουν την ιδιότητα $\varepsilon_i(s)|\varepsilon_{i+1}(s)$ και $\psi_{i+1}(s)|\psi_i(s)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, r-1$.* ■

Οι ρίζες των πολυωνύμων $\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$ ονομάζονται αντίστοιχα **μηδενικά** και **πόλοι** του ρητού πίνακα $A(s)$.

Η Smith - McMillan μορφή ενός ρητού πίνακα μπορεί εύκολα να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο υπολογισμού της Smith μορφής πολυωνυμικών πινάκων ως εξής:

Υπολογίζουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των όλων των στοιχείων του $A(s)$, έστω $d(s) \in \mathbb{R}[s]$ και γράφουμε

$$A(s) = \frac{1}{d(s)} N(s)$$

όπου $N(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}[s]$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε την Smith μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $N(s)$:

$$S^{\mathbb{C}}_{N(s)} = \begin{bmatrix} n_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n_r(s) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Διαιρούμε τα $n_i(s)$ με $d(s)$ και κάνουμε τις απλοποιήσεις που πιθανόν υπάρχουν. Οι αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις του $A(s)$ είναι τα κλάσματα που προκύπτουν μετά την απλοποίηση, δηλ.

$$\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} = \frac{n_i(s)}{d(s)}$$

Οι αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις απεικονίζουν πλήρως την αλγεβρική δομή μιας κλάσης ισοδυναμίας ρητών πινάκων στο $\mathbb{C}$. Αντίστοιχη έννοια ισοδυναμίας μπορεί να οριστεί και για την αλγεβρική δομή των ρητών πινάκων στο άπειρο. Πριν δώσουμε τον ορισμό της ισοδυναμίας αυτής είναι σκόπιμο να αναφέρουμε μερικές βασικές έννοιες πάνω στην δομή των ρητών συναρτήσεων στο άπειρο.

Για κάθε ρητή συνάρτηση $t(s) = n(s)/d(s)$ ορίζεται μια συνάρτηση $\delta_\infty : \mathbb{R}(s) \mapsto \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$

$$\delta_\infty(t(s)) = \begin{cases} \deg d(s) - \deg n(s) & t(s) \not\equiv 0 \\ +\infty & t(s) \equiv 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\delta_\infty(.)$ είναι μια διακριτή εκτίμηση (discrete evaluation) για το $\mathbb{R}(s)$. Κάθε συνάρτηση $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ μπορεί να γραφεί:

$$t(s) = (\frac{1}{s})^{q_\infty} \frac{n_1(s)}{d_1(s)}$$

όπου $q_\infty = \delta_\infty(t(s))$ και $\deg n_1(s) = \deg d_1(s)$. Αν $q_\infty > 0$ τότε η συνάρτηση $t(s)$ έχει ένα μηδενικό πολλαπλότητας q_∞ στο $s = \infty$, ενώ αντίθετα αν $q_\infty < 0$ η $t(s)$ έχει ένα πόλο πολλαπλότητας $-q_\infty$ στο $s = \infty$.

Μια ρητή συνάρτηση $t(s)$ ονομάζεται **κανονική** (proper) εάν-ν $\delta_\infty(t(s)) \geq 0$, στην περίπτωση που η ανισότητα είναι αυστηρή η $t(s)$ ονομάζεται **αυστηρά κανονική** (strictly proper) ενώ όταν $\delta_\infty(t(s)) = 0$ η $t(s)$ ονομάζεται **δικανονική** (biproper). Το σύνολο των κανονικών ρητών συναρτήσεων εφοδιασμένο με την διακριτή εκτίμηση $\delta_\infty(\cdot)$ ως "βαθμό" και την διαίρεση των στοιχείων του κατάλληλα ορισμένη, είναι ευκλείδιος δακτύλιος και συμβολίζεται με $\mathbb{R}_{pr}(s)$. Οι μονάδες του δακτυλίου (αντιστρέψιμα στοιχεία) είναι προφανώς οι δικανονικές συναρτήσεις.

Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}_{pr}(s)$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}_{pr}^{m\times n}(s)$ και τα στοιχεία του κανονικοί ρητοί πίνακες.

Ορισμος 1.20 *Ενας κανονικός ρητός πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{n\times n}(s)$ ονομάζεται $\mathbb{R}_{pr}(s)-$μονομετρικός ή δικανονικός εάν και μόνο εάν $T^{-1}(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{n\times n}(s)$, δηλαδή εάν και ο αντίστροφός του υπάρχει και είναι κανονικός.*

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι ένας κανονικός πίνακας $T(s)$ είναι δικανονικός εάν-ν ισχύουν οι δύο ακόλουθες συνθήκες:

- $\lim_{s\to\infty} T(s) = T_\infty \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (όπου το όριο $\lim_{s\to\infty} T(s)$ ερμηνεύεται ως το όριο των στοιχείων του πίνακα)
- $\det T_\infty \neq 0$

Είμαστε σε θέση τώρα να δώσουμε τον ορισμό της ισοδυναμίας που διατηρεί αναλλοίωτη τη δομή των ρητών συναρτήσεων στο άπειρο.

Ορισμος 1.21 *Δύο ρητοί πίνακες $A(s), B(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}(s)$ ονομάζονται **μονομετρικά ισοδύναμοι** στο $s = \infty$ εάν-ν υπάρχουν δικανονικοί πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{m\times m}(s)$ και $V(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{n\times n}(s)$, τέτοιοι ώστε*

$$B(s) = U(s)A(s)V(s)$$

*Στην ειδική περίπτωση $B(s) = U(s)A(s)$ ($B(s) = A(s)V(s)$) οι πίνακες $A(s), B(s)$ ονομάζονται **αριστερά (δεξιά) μονομετρικά ισοδύναμοι** στο $s = \infty$.* ∎

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η κανονική μορφή που προκύπτει κατα φυσικό τρόπο από την ισοδυναμία αυτή δίνεται από το επόμενο αποτέλεσμα:

Θεωρημα 1.22 *Κάθε ρητός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}(s)$ είναι μονομετρικά ισοδύναμος στο $s=\infty$ με ένα διαγώνιο ρητό πίνακα της μορφής:*

$$S^{\infty}_{A(s)} := diag\{s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, 0_{m-r,n-r}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}(s)$$

Ο πίνακας $S^{\infty}_{A(s)}$ ονομάζεται ***Smith - McMillan μορφή*** *του πίνακα $A(s)$ στο $s=\infty$. Οι δείκτες q_i και $\hat{q}_i$ έχουν την ιδιότητα*

$$\begin{aligned} q_1 &\geq q_2 \geq \ldots \geq q_k \geq 0 \\ \hat{q}_r &\geq \hat{q}_{r-1} \geq \ldots \geq \hat{q}_{k+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας $A(s)$ έχει ***μηδενικά στο*** *$s=\infty$ με πολλαπλότητες $\hat{q}_r, \hat{q}_{r-1}, \dots, \hat{q}_{k+1}$ και* ***πόλους στο*** *$s=\infty$ με πολλαπλότητες $q_1, q_2, \dots, q_k$.* ■

Η Smith - McMillan μορφή ενός ρητού $A(s)$ πίνακα μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με το ακόλουθο τρόπο:

Έστω ξ_i η ελάχιστη $\delta_\infty(.)$ ανάμεσα στις $\delta_\infty(.)$ όλων των ελλασόνων οριζουσών τάξης i και $\xi_0 = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi_0 - \xi_1 \\ q_2 &= \xi_1 - \xi_2 \\ &\vdots \\ q_r &= \xi_{r-1} - \xi_r \end{aligned}$$

και Smith-McMillan μορφή του $A(s)$ είναι

$$S^{\infty}_{A(s)} := diag\{s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_r}, 0_{m-r,n-r}\}$$

οι συναρτήσεις $s^{q_i}, i = 1, 2, \dots, r$ ονομάζονται **αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις** του $A(s)$ στο $s=\infty$. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι η τάξη του μεγαλύτερου πόλου στο άπειρο q_1, ενός πολυωνυμικού πίνακα ισούται με το μέγιστο βαθμό q του s που εμφανίζεται στον πίνακα.

Μια πολύ ενδιαφέρουσα επέκταση της έννοιας των πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών είναι αυτή των στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο ενός πολυωνυμικού πίνακα.

Έστω

$$A(s) = A_q s^q + A_{q-1}s^{q-1} + \ldots + A_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$$

Ορίζουμε ως **δυϊκό** (dual) του πίνακα $A(s)$ τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\tilde{A}(s) = s^q A(s^{-1}) = A_0 s^q + A_1 s^{q-1} + \ldots + A_q \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$$

Ορισμος 1.23 *Οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο (infinite elementary divisors) του πίνακα $A(s)$ είναι οι στοιχειώδεις διαιρέτες του δυϊκού πίνακα $\tilde{A}(s)$ στο $s = 0$.* ■

Οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο μπορούν εύκολα να υπολογιστούν εάν είναι γνωστή η Smith - McMillan μορφή του $A(s)$ στο άπειρο, χρησιμοποιώντας το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεωρημα 1.24 [8] *Έστω*

$$S^{\infty}_{A(s)} = diag\{s^{q_1}, s^{q_2}, \ldots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \ldots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, 0_{m-r,n-r}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}(s)$$

η Smith - McMillan μορφή του $A(s)$ στο $s = \infty$. Τότε οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο $s = \infty$ είναι της μορφής:

$$s^{\mu_i}, i = 1, 2, \ldots r$$

όπου τα μ_i δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mu_i &= q_1 - q_i, i = 1, 2, \ldots, k \\ \mu_i &= q_1 + \hat{q}_i, i = k+1, k+2, \ldots, r \end{aligned}$$

■

Όπως είναι προφανές από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να διακρίνουμε δύο είδη στοιχειωδών διαιρετών του $A(s)$ στο άπειρο. Οι πρώτοι είναι εκείνοι με δείκτες $i = 1, 2, \ldots, k$ οι οποίοι αντιστοιχούν στους πόλους του $A(s)$ στο άπειρο, ενώ αντίστοιχα οι διαιρέτες με δείκτες $i = k+1, k+2, \ldots, r$ αντιστοιχούν στα μηδενικά του $A(s)$ στο άπειρο.

Έστω ένας κανονικός τετράγωνος πολυωνυμικός πίνακας $A(s) = A_q s^q + A_{q-1}s^{q-1} + \ldots + A_0 \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$. Ένα πεπερασμένο φασματικό ζεύγος του $\tilde{A}(s)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ ορίζεται ως το άπειρο ιδιοζεύγος του $A(s)$, και ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$\sum_{k=0}^{q} A_k X_\infty J_\infty^{q-k} = 0, \quad rank \begin{bmatrix} X_\infty \\ X_\infty J_\infty \\ \vdots \\ X_\infty J_\infty^{\mu-1} \end{bmatrix} = \mu \tag{1.8}$$

όπου $X_\infty \in \mathbb{R}^{r\times\mu}$, $J_\infty \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ και $\mu = \sum_{i=1}^{r} \mu_i$. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι $\mu + \deg A(s) = rq$.

Ο αντίστροφος ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}^{r\times xr}[s]$ είναι γενικά ένας ρητός πίνακας και όχι απαραίτητα αυστηρά κανονικός, όπως θα ήταν πιθανόν αναμενόμενο κατ' αναλογία με τη βαθμωτή περίπτωση όπου ο αντίστροφος ενός πολυωνυμου είναι πάντα αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση. Η κανονικότητα ή μη του αντιστρόφου του $A(s)$ παίζει σημαντικό ρόλο στην αιτιότητα ή μη ενός συστήματος διακριτού χρόνου όπως θα γίνει σαφές στο κεφάλαιο 5.

Το ανάπτυγμα Laurent σε περιοχή του $s = \infty$ του $A(s)^{-1}$ είναι γενικά της μορφής

$$A(s)^{-1} = \sum_{i=v}^{-\infty} T_v s^v, |s| > \rho > 0f$$

Όταν $v \geq 0$ τότε προφανώς ο ρητός πίνακας $A(s)^{-1}$ δεν είναι αυστηρά κανονικός. Η ιδιότητα αυτή σχετίζεται άμεσα με την παρουσία μηδενικών στο άπειρο στον πίνακα $A(s)$.

Θεωρημα 1.25 *Εστω*

$$S_{A(s)}^{\infty} = diag\{s^{q_1}, s^{q_2}, \ldots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \ldots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}\} \in \mathbb{R}^{r\times r}(s)$$

η Smith - McMillan μορφή του $A(s)$ στο $s = \infty$ και $A(s)^{-1} = \sum_{i=v}^{-\infty} T_v s^v$ το ανάπτυγμα Laurent σε περιοχή του $s = \infty$ του $A(s)^{-1}$. Τότε

$$v = \hat{q}_r$$

■

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα γίνεται προφανές ότι ο $A^{-1}(s)$ είναι αυστηρά κανονικός εάν και μόνο εάν δεν υπάρχουν καθόλου μηδενικά στο άπειρο του $A(s)$ ή αντίστοιχα απλά κανονικός στην περίπτωση που $\hat{q}_r = 0$.

1.9 Πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες

Ιδιαίτερο ενδιάφερον παρουσιάζει η αλγεβρική δομή των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων (γνωστοί στην βιβλιογραφία ως matrix pencils). Αυτό οφείλεται στο ότι πολύ συχνά χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση συστημάτων εξισώσεων πρώτου βαθμού τόσο στο συνεχή όσο και στο διακριτό χρόνο (περιγραφή στο (γενικευμένο) χώρο των καταστάσεων). Εξάλλου η φασματική δομή ενός σταθερού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μπορεί άμεσα να μελετηθεί μέσω του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $sI - A$. Με αυτό τον τρόπο οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες μπορούν να θεωρηθούν σαν το ενδιάμεσο βήμα για την μελέτη προβλημάτων ιδιοτιμών σταθερών και μεγαλύτερου βαθμού πολυωνυμικών πινάκων.

Η γενική μορφή ενός πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα είναι:

$$A(s) = sE - A \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$$

Εκτός από τα δύο είδη μονομετρικής ισοδυναμίας (δηλ. στο $\mathbb{C}$ και στο $s = \infty$) που μπορούν να εφαρμοστούν γενικά στους πολυωνυμικούς πίνακες, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η λεγόμενη αυστηρή ισοδυναμία (strict equivalence) πρωτοβάθμιων πινάκων. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμος 1.26 [4] *Δύο πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$ ονομάζονται **αυστηρά ισοδύναμοι** εάν-ν:*

$$\exists M \in \mathbb{R}^{m\times m}, N \in \mathbb{R}^{n\times n} : A_2(s) = MA_1(s)N$$

■

Οι μονομετρικές ισοδυναμίες έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλοίωτη την δομή των ρητών πινάκων σε κάποια επιλεγμένα υποσύνολα του $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπως το $\mathbb{C}$ ή το $\{\infty\}$ που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Η αυστηρή ισοδυναμία απαιτεί οι πίνακες M, N να είναι σταθεροί, στην ουσία δηλαδή μονομετρικοί τόσο στο $\mathbb{C}$ όσο και στο άπειρο ταυτόχρονα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η αυστηρή ισοδυναμία να διατηρεί την δομή των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων σε όλο το $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Παρόλα αυτά η αυστηρή ισοδυναμία δεν μπορεί να απεικονίσει ταυτόχρονα τις Smith - McMillan μορφές στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Η πλήρης αλγεβρική δομή των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων μπορεί να απεικονιστεί μέσω μιας άλλης κανονικής μορφής που είναι γνωστή ως Kronecker μορφή.

Θεωρημα 1.27 *Κάθε πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $sE - A \in \mathbb{R}^{p\times m}[s]$, είναι αυστηρά ισοδύναμος με έναν επίσης πρωτοβάθμιο πίνακα της μορφής*

$$K(s) = \begin{bmatrix} sI_n - J_{\mathbb{C}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sJ_\infty - I_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_\epsilon(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_\eta(s) \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας στο δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι η Kronecker κανονική μορφή του αρχικού πρωτοβάθμιου πίνακα. Το πρώτο μπλοκ του διαγώνιου πίνακα αντιστοιχεί στα πεπερασμένες μηδενικά του $sE - A$ και ο πίνακας $J_{\mathbb{C}}$ είναι σε κανονική (πραγματική) Jordan μορφή. Αντίστοιχα το δεύτερο μπλοκ αντιστοιχεί στα μηδενικά στο άπειρο του αρχικού πίνακα και ο J_∞ είναι (μηδενοδύναμος) πίνακας σε Jordan μορφή με όλα του τα διαγώνια στοιχεία ίσα με μηδεν. Το τρίτο (τέταρτο) μπλοκ $L_\epsilon(s)$ ($L_\eta(s)$) είναι ένας μπλοκ διαγώνιος πίνακας, που αποτελείται από μικρότερα μη τετράγωνα μπλοκς $L_{\epsilon_i}(s)$, $i = 1, 2, ...r$ ($L_{\eta_i}(s)$, $i = 1, 2, ..., l$) της μορφής

$$L_{\epsilon_i}(s) = sM_{\epsilon_i} - N_{\epsilon_i} \qquad (L_{\eta_i}(s) = sM_{\eta_i}^T - N_{\eta_i}^T)$$

με $M_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v\times(v+1)}$ *και* $N_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v\times(v+1)}$,

όπου $v = \epsilon_i$ ή $v = \eta_i$. Το μπλοκ $L_{\epsilon_i}(s)$ $(L_{\eta_i}(s))$ είναι το δεξιό (αριστερό) Kronecker μπλοκ και οι ακέραιοι ϵ_i (η_i) είναι οι δεξιοί (αριστεροί) Kronecker δείκτες του $sE - A$. Επιπλέον, έστω

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{r} \epsilon_i \qquad (\eta = \sum_{i=1}^{l} \eta_i)$$

και

$$p = n + \mu + \epsilon + \eta + l$$

$$m = n + \mu + \epsilon + \eta + r$$

■

Τα δομικά συστατικά της Kronecker κανονικής μορφής απεικονίζουν πλήρως όλη την αλγεβρική δομή του $sE - A$ τόσο σε σχέση με την δομή των μηδενικών στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όσο και σε ότι αφορά την δομή που οφείλεται σε έλλειμα τάξης στις γραμμές και τις στήλες του πίνακα. Τα μπλοκ $J_{\mathbb{C}}, J_\infty$ απεικονίζουν σε Jordan μορφή τα πεπερασμένα και άπειρα μηδενικά των αντίστοιχων Smith - McMillan μορφών, ενώ τα μπλοκ $L_\epsilon(s), L_\eta(s)$ περιέχουν σημαντικές πληροφορίες που βρίσκουν δυναμική ερμηνεία στην μελέτη πρωτοβάθμιων συστημάτων.

Στην περίπτωση που ο πίνακας $sE - A$ είναι κανονικός τα μπλοκ $L_\epsilon(s), L_\eta(s)$ παραλείπονται οπότε η μορφή που προκύπτει προβάλει μόνο την δομή των μηδενικών του πίνακα στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Η μορφή αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία σαν Weierstrass μορφή.

1.10 Βιβλιογραφία

[1] Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., "Σημειώσεις μαθηματικής θεωρίας συστημάτων", Θεσσαλονικη, 1999.

[2] Βασιλείου Π.Χ.Γ., Τσακλίδης Γ., "Πανεπιστημιακές παραδόσεις στην Αναλυτική θεωρία πινάκων", Υπηρεσια Δημοσιευμάτων ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη, 1992.

[3] Βασιλείου Π.Χ.Γ., Τσακλίδης Γ., "Εφαρμοσμένη θεωρία πινάκων", Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1998.

[4] Gantmacher F.R.,’Matrix Theory’, Chelsea Publishing Company, 1971, New York.

[5] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L., ”Matrix Polynomial”, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press Inc. (London), 1982, New York.

[6] Λάκκης Κ., "Άλγεβρα", Εκδόσεις Ζήτη, 4η έκδοση, Θεσσαλονίκη, 1984.

[7] Μποζαπαλίδης Σ.Μ., "Γραμμική Άλγεβρα", Μέρος Α & Β, Θεσσαλονίκη, 1984.

[8] Vardulakis A.I.G., ’Linear Multivariable Control - Algebraic Analysis and Synthesis Methods’, Willey, 1991, New York.

Κεφαλαιο 2

Κανονικά πρωτοβάθμια συστήματα διακριτού χρόνου

2.1 Εισαγωγή

Η διαδικασία μοντελοποίησης πολύπλοκων συστημάτων ξεκινάει συνήθως με την επιλογή ενός συνόλου μεγεθών που θεωρούμε οτι επαρκούν κατά κάποια έννοια για την πλήρη περιγραφή τους. Οι μεταβλητές αυτές συνηθίζεται να ονομάζονται περιγραφικές μεταβλητές (descriptor variables). Οι περιγραφικές μεταβλητές έχουν συνήθως κάποιο φυσικό νόημα για το σύστημα που περιγράφουν. Μπορεί για παράδειγμα να είναι φυσικά μεγέθη όπως θέσεις, ταχύτητες ή δυνάμεις σε μια Νευτώνια περιγραφή, τιμές ή ποσότητες σε οικονομικά συστήματα κλπ. Στο πρώτο στάδιο της μοντελοποίησης δεν γίνεται συνήθως καμιά προσπάθεια ελαχιστοποίησης του αριθμού των μεταβλητών αυτών, αφού ο στόχος είναι απλά μια πλήρης περιγραφή του συστήματος. Το επόμενο βήμα είναι η διατύπωση των σχέσεων μεταξύ των περιγραφικών μεταβλητών, όπως αυτές υπαγορεύονται σε μορφή εξισώσεων από τους νόμους που διέπουν το σύστημα. Είναι αναμενόμενο μερικές από τις σχέσεις αυτές να είναι δυναμικές, δηλαδή να αναφέρονται σε τιμές των μεταβλητών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, ενώ άλλες από αυτές να είναι καθαρά στατικές, με την έννοια ότι είναι απλές αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών. Η γραφή των σχέσεων αυτών σε διανυσματική μορφή δίνει την λεγόμενη περιγραφική μορφή.

Γραμμικά συστήματα σε περιγραφική μορφή συναντώνται τόσο σε συνεχή όσο και σε διακριτό χρόνο σε πάρα πολλές περιπτώσεις φυσικών, μηχανικών, κοινωνικών, οικονομικών μοντέλων. Ο όρος περιγραφική μορφή (descriptor form) οφείλεται στο γεγονός ότι ο τρόπος γραφής των μοντέλων αυτών, δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια απλή καταγραφή των φυσικών εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα, σε μια συμπαγή μορφή με τη βοήθεια πινάκων. Συνώνυμοι όροι που συναντώνται συχνά στην βιβλιογραφία είναι, περιγραφή στο γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (generalized state space) αφού αποτελούν κατά μια έννοια άμεση γενίκευση της περιγραφής στο χώρο των καταστάσεων, περιγραφή ημικατάστασης (semistate description), πεπλεγμένα συστήματα (implicit systems) ή γενικότερα ιδιάζοντα πρωτοβάθμια συστήματα (singular systems).
Η γενική μορφή ενός γραμμικού περιγραφικού συστήματος διακριτού χρόνου είναι:

$$\begin{aligned} Ex_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{2.9}$$

όπου x_k είναι η διανυσματική περιγραφική μεταβλητή, u_k είναι η είσοδος του συστήματος, y_k η έξοδος του συστήματος, E, A, B, C είναι πραγματικοί (E, A πιθανόν μη-τετράγωνοι) πίνακες κατάλληλων διαστάσεων. Στην ειδική περίπτωση $E = I$ η περιγραφική μορφή ανάγεται στην γνωστή περιγραφή στο χώρο των καταστάσεων. Ακόμη και στην περίπτωση που ο πίνακας E είναι αντιστρέψιμος, οπότε με πολλαπλασιασμό της εξίσωσης (2.9) με E^{-1} από αριστερά καταλήγουμε σε περιγραφή χώρου καταστάσεων, είναι σκόπιμο να αποφύγουμε την αντιστροφή του E προς αποφυγή λαθών αριθμητικής φύσης που προκύπτουν από ένα τέτοιο χειρισμό.
Οταν ο πίνακας E είναι γενικά μη-αντιστρέψιμος μιλάμε για ένα ιδιάζον σύστημα (singular system), γεγονός που εκφράζει σε κάποιες περιπτώσεις μια ελλειπή δυναμική περιγραφή ή την παρουσία καθαρά αλγεβρικών (στατικών) συνθηκών μεταξύ των μεγεθών της περιγραφικής μεταβλητής. Υπό ορισμένες προυποθέσεις, οι τελευταίες μπορούν με κατάλληλους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς να απομονωθούν δίνοντας τις λεγόμενες μη-δυναμικές μεταβλητές του συστήματος. Γενικότερα η απώλεια τάξης στον πίνακα E μπορεί να συνεπάγεται για ενα σύστημα διακριτού χρόνου την μη-αιτιατή φύση του μοντέλου, αφού είναι προφανές ότι η μεταβλητή x_{k+1} δεν καθορίζεται μονοσήμαντα από την προηγούμενη κατάσταση του συστήματος. Μια επιπλέον ιδιαιτερότητα της

περίπτωσης αυτής είναι η αδυναμία επιλογής αυθαίρετων αρχικών συνθηκών, αφού κάποιες επιλογές καθιστούν το σύστημα μη-συμβιβαστό. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην αντίστοιχη περίπτωση συστήματος συνεχούς χρόνου η μη-αντιστρεψιμότητα του E συνεπάγεται πιθανή ασυνέχεια της περιγραφικής μεταβλητής την χρονική στιγμή $t = 0$ ή ακόμη και παρουσία κρουστικών συναρτήσεων του Dirac $\delta(t)$ (και παραγώγων της) στην απόκριση του.

Η περίπτωση που έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (βλέπε π.χ. [12] , [13] , [14] , [15] , [16] , [7] , [8] , [9] , [10] , [17] , [5]) είναι αυτή των λεγόμενων κανονικών (regular) συστημάτων. Με τον όρο κανονικά συστήματα εννοούμε την οικογένεια των περιγραφικών μορφών με E, A τετράγωνους και επιπλέον με την ιδιότητα $\det[\lambda E - A] \neq 0$ για σχεδόν κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται έμμεσα την συνθηκολογησιμότητα και επιλυσιμότητα του συστήματος, έννοιες που παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω στο παρόν κεφάλαιο. Οι προσεγγίσεις που έχουν προταθεί αναφέρονται τόσο στην αντιμετώπιση των συστημάτων αυτών σαν προβλήματα συνοριακών συνθηκών δύο σημείων όπου η χρονική μεταβλητή περιορίζεται σε ένα πεπερασμένο υποσύνολο $0, 1, 2, ..., N$ του $\mathbb{Z}^+$, όσο και στην κλασσική αντιμετώπιση εύρεσης των λύσεων πάνω από το χρονικό πλαίσιο $\mathbb{Z}^+$.

Στην βιβλιογραφία ο όρος ιδιάζον σύστημα (singular system) χρησιμοποιείται για συστήματα περιγραφικής μορφής όπου ο πίνακας E είναι γενικά ιδιάζων και πιθανόν μη-τετράγωνος. Ειδικότερα στην περίπτωση που οι E, A είναι μη τετράγωνοι ή είναι τετράγωνοι αλλά $\det[\lambda E - A] = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ τα συστήματα ονομάζονται μη-κανονικά (non-regular).

2.2 Παραδείγματα συστημάτων σε περιγραφική μορφή

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα συστημάτων διακριτού χρόνου σε περιγραφική μορφή.

2.2.1 Το δυναμικό μοντέλο του Leontief

Το χαρακτηριστικότερο ίσως παράδειγμα συστήματος σε περιγραφική μορφή διακριτού χρόνου είναι το δυναμικό μοντέλο του Leontief. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε το 1970 από τον W. Leontief [6] για την περιγραφή μιας οικονομίας πολλαπλών τομέων (multisector economy). Η μορφή του μοντέλου αυτού είναι:

$$x_k = Ax_k + B[x_{k+1} - x_k] + d_k \tag{2.10}$$

όπου το $x_k \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα που παριστάνει τα επίπεδα παραγωγής των διαφόρων τομέων την χρονική στιγμή k, $d_k \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα της ζήτησης στους αντίστοιχους τομείς και οι πίνακες A, B είναι σταθεροί πραγματικοί πίνακες διάστασης $n \times n$. Η ερμηνεία της (2.10) είναι ότι η παραγωγή x_k στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αναλύεται σε άθροισμα των τρίων όρων που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της. Ο πρώτος όρος Ax_k είναι η ποσότητα παραγωγής που απαιτείται ως απευθείας είσοδος για την τρέχουσα χρονική περίοδο αφού οι διάφοροι τομείς αλληλοεξαρτώνται. Ο πίνακας A, ονομάζεται πίνακας εισροών-εκροών του Leontief και έχει μη αρνητικούς όρους. Ο δεύτερος όρος $B[x_{k+1} - x_k]$ παριστάνει την ποσότητα παραγωγής που απαιτείται για παραγωγική επέκταση σε μορφή κεφαλαίου, για να είναι δυνατή η παραγωγή x_{k+1} την επόμενη χρονική περίοδο. Ο πίνακας B ονομάζεται συντελεστής κεφαλαίου και περιέχει επίσης μη αρνητικούς όρους. Επιπλέον τα περισσότερα στοιχεία του B είναι συνήθως μηδέν, αφού μόνο λίγοι τομείς συνεισφέρουν στην συσσώρευση κεφαλαίου. Τέλος ο τρίτος όρος d_k εκφράζει την απευθείας ζήτηση στην τρέχουσα χρονική περίοδο.
Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης είναι αυτός που καθιστά το σύστημα δυναμικό, αφού περιέχει την διαφορά παραγωγής ανάμεσα σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές. Γράφοντας το σύστημα σε περιγραφική μορφή έχουμε

$$Bx_{k+1} = (I - A + B)x_k - d_k \tag{2.11}$$

Στην τυπική του μορφή ο πίνακας B είναι μη αντιστρέψιμος, γεγονός που μας απαγορεύει να εντοπίσουμε μια αναδρομική λύση προς τα εμπρός της μορφής

$$x_{k+1} = B^{-1}[(I - A + B)x_k - d_k]$$

γνωρίζοντας την αρχική τιμή x_0 και την ζήτηση d_k σαν εξωτερική είσοδο στο σύστημα.

Ένας επιπλέον περιορισμός που εμφανίζεται άμεσα υπό το φώς μιας προκαταρκτικής ανάλυσης, αφορά την ελευθερία στην επιλογή των αρχικών συνθηκών. Ο περιορισμός αυτός αντανακλά έμμεσα την μη αιτιατή φύση του μοντέλου σαν εγγεννή ιδιοτητά του.

Αξίζει να σημειώσουμε οτι ακόμη και η παραδοχή της κανονικότητας του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $\sigma B - (I - A + B)$ (δηλ. ότι $\det(\sigma B - (I - A + B)) \neq 0$ για σχεδόν κάθε $\sigma \in \mathbb{C}$) που γίνεται από αρκετούς συγγραφείς [12] , [13] , [1] , [18] , μπορεί να μην είναι αρκετή.

2.2.2 Το σύστημα "προγνώσεων"

Ένα δεύτερο παράδειγμα που επιδεικνύνει καθαρά το μη αιτιατό χαρακτήρα των συστημάτων σε περιγραφική μορφή, είναι το σύστημα που έχει σαν έξοδο την είσοδο του στην επόμενη χρονική στιγμή (pure predictor [12]). Το "περίεργο" αυτό σύστημα δεν είναι φυσικά πραγματοποίησιμο, αλλάη πραγμάτωσή του σε περιγραφική μορφή αποτελεί μια πολύ καλή ένδειξη του εύρους των συστημάτων που μπορούν εκφραστούν στην μορφή αυτή.

Αν y_k είναι η έξοδος ενός τέτοιου συστήματος και u_k η αντίστοιχη είσοδος του, τότε μπορούμε να γράψουμε την σχέση εισόδου-εξόδου

$$y_k = u_{k+1} \tag{2.12}$$

Αν θέσουμε

$$x_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$$

είναι προφανές ότι η (2.12) γράφεται σε περιγραφική μορφή ως

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_k$$

Ο πίνακας στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ιδιάζων γεγονός που καθιστά το σύστημα μη επιλύσιμο προς τα εμπρός (βλέπε παρ. 2.7).

2.2.3 Βέλτιστος έλεγχος - Εξίσωση του Riccati

Η διακριτή εξίσωση του Riccati εμφανίζεται σε προβλήματα βελτιστού ελέγχου (optimal control) ως το τελικό βήμα για την επίλυση των προβλημάτων αυτών. Η τυπική μορφή του προβλήματος για την περίπτωση βέλτιστου ελέγχου (πεπερασμένου ορίζοντα) ενός συστήματος στο χώρο των καταστάσεων διατυπώνεται ως εξής:

Έστω το σύστημα διακριτού χρόνου

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{2.13}$$

το οποίο συνδέεται με κόστος που εκφράζεται μέσω τετραγωνικών μορφών από τη σχέση

$$J = \frac{1}{2}x_N^T P_N x_N + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i \tag{2.14}$$

όπου N είναι το τελος της χρονικής περιόδου πάνω από την οποία γίνεται η ελαχιστοποίηση του κόστους J, P_N, Q και R είναι θετικά ημιορισμένες τετραγωνικές μορφές. Εισάγωντας τον πολλαπλασιαστή του Hamilton

$$\lambda_k = P_k x_k, \; \lambda_N = P_N x_N$$

$(P_k = P_k^T)$ και εφαρμόζοντας τις συνθήκες στασιμότητας προκύπτουν οι σχέσεις

$$\lambda_k = A^T \lambda_{k+1} + Q x_k \tag{2.15}$$

$$Ru_k + B^T \lambda_{k+1} = 0 \tag{2.16}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.13), (2.15), (2.16) μπορούμε να διατυπώσουμε τις συνθήκες βελτιστοποίησης σαν (ομογενή) εξίσωση σε περιγραφική μορφή:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 \\ 0 & -B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -Q & I & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \\ u_k \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Η εξίσωση Riccati (στην μη ιδιάζουσα περίπτωση, δηλ. αν $\det(R + B^T P_k B) \neq 0$) που συνδεέται με το πρόβλημα έχει την μορφή

$$P_{k-1} = A^T P_k A - A^T P_k B (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k A + Q \tag{2.18}$$

Ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$H(\sigma) = \sigma \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 \\ 0 & -B^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -Q & I & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

ονομάζεται *Εκτεταμένος Χαμιλτονιανός Πίνακας* (Extended Hamiltonian Pencil [4]) που αντιστοιχεί στην εξίσωση του Riccati (2.18).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η περιγραφική εξίσωση (2.17) είναι ιδιάζουσα αφού οι πίνακες που εμφανίζονται σε αυτή είναι μη τετράγωνοι. Η επίλυση της εξίσωσης (2.17) σαν πρόβλημα συνοριακών συνθηκών στο σύνολο $k = 0, 1, ..., N$ και όχι απλά σαν αναδρομική σχέση προς τα εμπρός (ή πίσω) είναι προφανώς επιβεβλημένη από την ίδια την φύση του προβλήματος.

2.2.4 Διασυνδεμένα συστήματα μεγάλης κλίμακας

Τα συστήματα μεγάλης κλίμακας είναι συχνά σκόπιμο να μοντελοποιούνται σαν διασυνδέσεις μικρότερων απλών συστημάτων. Κάθε ένα από τα υποσυστήματα αυτά περιγράφεται από εξισώσεις στον χώρο καταστάσεων της μορφής:

$$\begin{aligned} x^i_{k+1} &= A_i x^i_k + B_i v^i_k \\ z^i_k &= C_i x^i_k + D_i v^i_k \end{aligned} \tag{2.19}$$

όπου x^i_k, v^i_k, z^i_k τα διανύσματα κατάστασης, εισόδου και εξόδου του υποσυστήματος i αντίστοιχα, ενώ A_i, B_i, C_i, D_i είναι σταθεροί πραγματικοί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων που περιγράφουν τα συστήματα αυτά, για $i = 1, 2, \ldots p$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.19) σε μπλοκ διαγώνια μορφή μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bv_k \\ z_k &= Cx_k + Dv_k \end{aligned} \tag{2.20}$$

Εστω τώρα y_k και u_k η συνολική έξοδος και είσοδος του διασυνδεμένου συστήματος αντιστοιχα. Η διασύνδεση των υποσυστημάτων τότε έχει την γενική μορφή

$$\begin{aligned} v_k &= Kz_k + Mu_k + Ny_k \\ y_k &= Pz_k + Qu_k + Rv_k \end{aligned} \tag{2.21}$$

όπου οι πίνακες K, M, N, P, Q, R είναι σταθεροί κατάλληλων διαστάσεων και περιγράφουν τις διασυνδέσεις μεταξύ των διαφόρων σημάτων. Στην γενική περίπτωση δεν είναι δυνατό να να συνδυάσουμε τις (2.20) και (2.21) ώστε να πετύχουμε μια περιγραφή του συστήματος στο χώρο των καταστάσεων. Η μόνη περιγραφή που είναι δυνατή σε κάθε περίπτωση είναι η περιγραφική μορφή του συστήματος, η οποία είναι

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ v_{k+1} \\ z_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & -I & 0 \\ 0 & -I & K & N \\ 0 & R & P & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{bmatrix} u_k$$

Προφανώς η παραπάνω μορφή εμπίπτει στη γενική κατηγορία συστημάτων σε περιγραφική μορφή.

2.2.5 Το διακριτό "ισοδύναμο" ενός συνεχούς συστήματος

Το παράδειγμα που παρουσιάζουμε προέρχεται από την [9] . Θεωρούμε το ιδιάζον σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.22}$$

όπου $x(t)$ είναι το περιγραφικό διάνυσμα συνεχούς χρόνου, $E, A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{p\times m}$ είναι σταθεροί πίνακες που περιγράφουν το σύστημα για $t \in \mathbb{R}^+$. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (2.22) έχουμε

$$(sE - A)X(s) = Ex(0) + BU(s) \tag{2.23}$$

όπου $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ και $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$. Ένας τρόπος να γράψουμε το σύστημα (2.22) σε μια "ισοδύναμη" περιγραφή διακριτού χρόνου, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Αναπτύσουμε τις συναρτήσεις $X(s)$ και $U(s)$ σε σειρά Laurent σε περιοχή του $s = \infty$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i s^{\mu-i} \\ U(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i s^{\mu-i}, |s| > \rho > 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

όπου μ είναι ο μέγιστος βαθμός του s που εμφανίζεται στα $X(s)$ και $U(s)$. Αντικαθιστώντας τις (2.24) στην (2.23) και εξισώνοντας δυνάμεις δυνάμεις του s, παίρνουμε την παρακάτω αναδρομική μορφή:

$$Ex_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \delta_k Ex(0), \text{ όπου } \delta_k = 0 \text{ για } k \neq 0 \text{ και } \delta_0 = 1 \tag{2.25}$$

η οποία είναι κατά μια έννοια "ισοδύναμη" περιγραφική μορφή διακριτού χρόνου που αντιστοιχεί στην συνεχή εξίσωση (2.22), αφού επιλύοντας την (2.25) για $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ επιτυγχάνουμε επίσης την λύση της (2.22).

2.3 Επιλυσιμότητα και συνθηκολογησιμότητα

Οι έννοιες της επιλυσιμότητας (solvability) και συνθηκολογησιμότητας (conditionability) για περιγραφικά συστήματα παρουσιάζονται στην [12] και αναφέρονται στην περίπτωση των χρονικά μεταβαλόμενων τετράγωνων συστημάτων. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα περιοριστούμε στην χρονικά αμετάβλητη περίπτωση αφού αυτή κυρίως μας αφορά. Η ανάλυση που παρουσιάζουμε προέρχεται από την [11] . Το χρονικό πλαίσιο που χρησιμοποιείται είναι ένα πεπερασμένο σύνολο $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ αντί του $\mathbb{Z}^+$. Έχοντας καθορίσει τον πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα για το σύστημα μπορούμε να γράψουμε την (2.9) πιο αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} -A & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -A & E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

ή χρησιμοποιόντας μια πιο σύντομη γραφή

$$\begin{aligned} A_N \bar{x}_N &= B_N \bar{u}_{N-1} \\ \bar{y}_N &= C_{N+1} \bar{x}_N \end{aligned} \tag{2.27}$$

Προφανώς η εξίσωση (2.26) και συνεπώς και η (2.9) είναι επιλύσιμη για κάθε πιθανό σετ εισόδων $u_0, u_1, \ldots u_{N-1}$ εάν και μόνο εάν

$$R(B_N) \subset R(A_N)$$

όπου $R(.)$ συμβολίζει το σύνολο τιμών του αντίστοιχου πίνακα.

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμος 2.1 [12] *Το περιγραφικό σύστημα (2.27) ονομάζεται επιλύσυμο εάν-ν για κάθε σετ εισόδων $u_0, u_1, \ldots u_{N-1}$ υπάρχει λύση $x_0, x_1, \ldots x_N$.*

Άμεση συνέπεια της παραπάνω ανάλυσης είναι το παρακάτω:

Λημμα 2.2 *Το χρονικά μεταβαλόμενο περιγραφικό σύστημα (2.9) είναι επιλύσιμο εάν-ν*

$$R(B_N) \subset R(A_N) \tag{2.28}$$

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω λήμμα στην αρχική του μορφή στην [12] αναφέρεται στην ειδική περίπτωση $B = I$ οπότε η συνθήκη (2.28) ανάγεται στην

$$rank A_N = Nn$$

δηλ. στην απαίτηση ο πίνακας A_N να έχει πλήρη τάξη γραμμών.

Θεωρημα 2.3 *Το σύστημα (2.9) είναι επιλύσιμο εάν-ν*

$$rank[\sigma E - A, B] = rank(\sigma E - A) \text{ για σχεδόν κάθε}^3\ \sigma \in \mathbb{C} \tag{2.29}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε το διάνυσμα $q = [q_1^T, q_2^T, \ldots q_N^T]^T$, με $q_i \in \mathbb{R}^n$ καθώς και το συσχετιζόμενο πολυωνυμικό διάνυσμα $q(\sigma) = q_1 + q_2\sigma + \ldots q_N\sigma^{N-1}$. Προφανώς

$$q^T A_N = [-q_1^T A, (q_1^T E - q_2^T A), \ldots, (q_{N-1}^T E - q_N^T A), q_N^T E]$$

ενώ αντίστοιχα

$$q^T(\sigma)(\sigma E - A) = -q_1^T A + (q_1^T E - q_2^T A)\sigma +, \ldots, (q_{N-1}^T E - q_N^T A)\sigma^{N-1} + q_N^T E\sigma^N$$

άρα $q^T A_N = 0$ εάν και μόνο εάν $q^T(\sigma)(\sigma E - A) = 0, \forall \sigma \in \mathbb{C}$. Επιπλέον $q^T B_N = [q_1^T B, q_2^T B, \ldots, q_N^T B]$ και $q^T(\sigma)B = q_1^T B + q_2^T B\sigma +, \ldots, q_N^T B\sigma^{N-1}$. Οπότε προφανώς $q^T B_N = 0$ εάν και μόνο εάν $q^T(\sigma)B = 0, \forall \sigma \in \mathbb{C}$.

Έστω τώρα ότι $R(B_N) \subset R(A_N)$. Τότε $q^T A_N = 0 \Rightarrow q^T B_N = 0$. Υποθέτουμε ότι $q^T(\sigma)(\sigma E - A) = 0, \forall \sigma \in \mathbb{C}$. Τότε $q^T A_N = 0$ οπότε και $q^T B_N = 0$ και συνεπώς $q^T(\sigma)B = 0, \forall \sigma \in \mathbb{C}$. Δηλαδή $R(G) \subset R(\sigma E - A)$ για σχεδόν κάθε $\sigma \in \mathbb{C}$, που αποδεικνύει την (2.29).

Η απόδειξη του αντίστροφου είναι εντελώς ανάλογη. ■

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι η κανονικότητα του συστήματος εγγυάται και την επιλυσιμότητα του αφού, εξ' ορισμού $rank(\sigma E - A) = n$ για σχεδόν κάθε $\sigma \in \mathbb{C}$.

Εξετάζουμε τώρα την έννοια της συνθηκολογησιμότητας, η οποία συνδέεται με την μοναδικότητα των λύσεων. Είναι ξεκάθαρο από την (2.26) ότι ο αριθμός των αγνώστων $(nN + n)$ είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων (nN). Αυτό έχει σαν συνέπεια η περιγραφική μεταβλητή να μην καθορίζεται μονοσήμαντα από την είσοδο

u_k όταν το σύστημα είναι επιλύσιμο. Για να καθοριστεί μοναδικά μια λύση χρειάζονται επιπλέον εξισώσεις, οι οποιές μπορούν να πάρουν διάφορες μορφές. Για παράδειγμα μπορεί να δίνονται συγκεκριμένες τιμές της μεταβλητής x_k σε διάφορες χρονικές στιγμές k ή να τίθενται περιορισμοί της μορφής γραμμικών συνδυασμών μεταξύ αυτών. Στην περίπτωση μας εξαιτίας της επιλογής του χρονικού διαστήματος, είναι φυσικό οι επιπλέον αυτοί περιορισμοί να εφαρμόζονται στα άκρα του χρονικού διαστήματος σαν συνοριακές συνθήκες. Η έννοια της συνθηκολογησιμότητας συνδέεται ακριβώς με την ιδιότητα του συστήματος να καθορίζει μοναδικά τις ενδιάμεσες τιμές του x_k, δεδομένων των συνοριακών τιμών του διαστήματος $k = 0, 1, 2, \ldots, N$. Όπως θα γίνει σαφές παρακάτω η επιλογή των συνοριακών τιμών δεν είναι αυθαίρετη. Προς το παρόν θα αρκεστούμε να ονομάσουμε *συμβιβαστές συνοριακές τιμές*, εκείνες που σε συνδυασμό με την συγκεκριμένη ακολουθία εισόδων δίνουν λύση.

Ορισμος 2.4 [12] *Το επιλύσιμο περιγραφικό σύστημα (2.27) ονομάζεται συνθηκολογήσιμο ως προς την περιγραφική μεταβλητή εάν-ν για κάθε σετ εισόδων $u_0, u_1, \ldots u_{N-1}$ και για κάθε επιλογή συμβιβαστών συνοριακών τιμών x_0, x_N, οι ενδιάμεσες τιμές $x_1, x_2, \ldots x_{N-1}$ καθορίζονται μοναδικά.*

Έστω το σύστημα (2.9) και η συσχετιζόμενη με αυτό εξίσωση (2.26). Υποθέτοντας ότι το σύστημα είναι επιλύσιμο, δεδομένων των εισόδων u_k και επιλέγοντας συγκεκριμένες τιμές συνοριακές x_0, x_N, διερευνούμε τις πιθανές ενδιάμεσες τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$. Έστω ότι με τις παραπάνω προυποθέσεις εμφανίζονται δύο διαφορετικά σετ ενδιάμεσων τιμών, $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ και $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{N-1}$. Η διαφορά των δύο αυτών λύσεων πρέπει τότε να ανήκει στον πυρήνα (μηδενικό χώρο) του πίνακα:

$$G_N = \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ -A & E & \ddots & \vdots \\ 0 & -A & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & E \\ 0 & \cdots & 0 & -A \end{bmatrix} \in R^{nN \times n(N-1)}$$

Με βάση την ανάλυση αυτή δίνουμε το ακόλουθο:

Λημμα 2.5 *Το (επιλύσιμο) περιγραφικό σύστημα (2.27) είναι συνθηκολογήσιμο ως προς την περιγραφική μεταβλητή εάν-ν ο πίνακας G_N έχει πλήρη τάξη στηλών, δηλ.*

$$rank G_N = n(N-1) \tag{2.30}$$

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι οι δύο διαφορετικές λύσεις $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ και $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{N-1}$ ταυτίζονται υποχρεωτικά εάν-ν $KerG_N = \{0\}$, γεγονός που αποδεικνύει την (2.30). ■

Ένας γενικότερος ορισμός που αποκαθιστά την δυαδικότητα των ιδιοτήτων της επιλυσιμότητας και της συνθηκολογησιμότητας προτάθηκε από τον F. Lewis στην [11] . Η ιδιότητα αυτή αφορά την μοναδικότητα της εξόδου y_k, για αυτό και την διακρίνουμε με την ονομασία συνθηκολογησιμότητα ως προς την έξοδο.

Ορισμος 2.6 [11] *Το επιλύσιμο περιγραφικό σύστημα (2.9) ονομάζεται συνθηκολογήσιμο ως προς την έξοδο εάν-ν για κάθε σετ εισόδων $u_0, u_1, \ldots u_{N-1}$ και για κάθε επιλογή συμβιβαστών συνοριακών τιμών x_0, x_N, οι ενδιάμεσες τιμές $y_1, y_2, \ldots y_{N-1}$ των y_0, y_N καθορίζονται μοναδικά.*

Είναι φανερό ότι η συνθηκολογησιμότητα εξόδου σαν έννοια εμπεριέχει και την συνθηκολογησιμότητα του διανύσματος κατάστασης, αφού η πρώτη ανάγεται στη δεύτερη για $C = I$.

Λημμα 2.7 *Το (επιλύσιμο) περιγραφικό σύστημα (2.27) είναι συνθηκολογήσιμο ως προς την έξοδο εάν-ν*

$$\ker(G_N) \subset \ker(C_{N-1}) \tag{2.31}$$

Απόδειξη. Έστω μια ακολουθία εισόδων $u_0, u_1, \ldots u_{N-1}$ και δύο συνοριακές τιμές x_0, x_N οι οποίες δίνουν λύση στην (2.27). Υποθέτουμε ότι δεδομένων των παραπάνω το σύστημα παράγει δύο διαφορετικές περιγραφικές λύσεις $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N$ και $x_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{N-1}, x_N$, ενώ οι αντίστοιχες έξοδοι θα είναι $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}, y_N$ και $y_0, y'_1, y'_2, \ldots, y'_{N-1}, y_N$. Η διαφορά των δύο αυτών λύσεων θα ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$G_N \begin{bmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} - x'_{N-1} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} y_1 - y'_1 \\ y_2 - y'_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} - y'_{N-1} \end{bmatrix} = C_{N-1} \begin{bmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} - x'_{N-1} \end{bmatrix}$$

Οι δύο έξοδοι y_k και y'_k ταυτίζονται σε κάθε περίπτωση εάν-ν κάθε διάνυσμα που ανήκει στο $\ker(G_N)$ ανήκει επίσης και στο $\ker(C_{N-1})$, γεγονός που αποδεικνύει το λήμμα. ■

Προφανώς η συνθήκη (2.31) ανάγεται στην (2.30) για $C = I$.

Διατυπώνουμε τώρα ένα κριτήριο για την συνθηκολογησιμότητα εξόδου αντίστοιχο του αποτελέσματος (2.29):

Θεωρημα 2.8 *Το (επιλύσιμο) περιγραφικό σύστημα (2.9) είναι συνθηκολογήσιμο ως προς την έξοδο εάν-ν*

$$rank \begin{bmatrix} \sigma E - A \\ C \end{bmatrix} = rank(\sigma E - A) \text{ για σχεδόν κάθε } \sigma \in \mathbb{C} \tag{2.32}$$

Αποδειξη. Έστω το διάνυσμα $p = \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{N-2} \end{bmatrix}$ με $p_i \in \mathbb{R}^n$ και το αντίστοιχο πολυωνυμικό διάνυσμα $p(\sigma) = p_0 s^{N-2} + \ldots + p_{N-2}$. Τότε

$$G_N p = \begin{bmatrix} Ep_0 \\ -Ap_0 + Ep_1 \\ \vdots \\ -Ap_{N-2} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα

$$(\sigma E - A)p(\sigma) = -Ap_{N-2} + \ldots + (-Ap_0 + Ep_1)\sigma^{N-2} + Ep_0\sigma^{N-1}$$

Ομοίως

$$C_{N-1}p = \begin{bmatrix} Cp_0 \\ Cp_1 \\ \vdots \\ Cp_{N-2} \end{bmatrix}$$

και

$$Cp(\sigma) = Cp_{N-2} + \ldots + C\sigma^{N-3} + Cp_0\sigma^{N-2}$$

Οπότε αν $G_N p = 0 \Rightarrow C_{N-1}p = 0$, τότε $(\sigma E - A)p(\sigma) = 0, \forall \sigma \in \mathbb{C} \Rightarrow Cp(\sigma) = 0$, $\forall \sigma \in \mathbb{C}$ που αποδεικνύει την (2.32). Η αντίστροφη απόδειξη είναι εντελώς αντίστοιχη. ■

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι η κανονικότητα του συστήματος εγγυάται και την συνθηκολογησιμότητα, τόσο ως προς την περιγραφική μεταβλητή όσο ως και προς την έξοδο, αφού εξ' ορισμού $rank(\sigma E - A) = n$ για σχεδόν κάθε $\sigma \in \mathbb{C}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι δύο ιδιότητες της επιλυσιμότητας και της συνθηκολογησιμότητας είναι δεδομένες για κανονικά περιγραφικά συστήματα. Σε ότι ακολουθεί στο παρόν κεφάλαιο θα περιοριστούμε στην μελέτη κανονικών συστημάτων.

2.4 Απεικόνιση συνοριακών συνθηκών

Όπως έχει γίνει σαφές από την παραπάνω ανάλυση, η λύση ενός κανονικού περιγραφικού συστήματος εξαρτάται άμεσα από την επιλογή αρχικών και τελικών τιμών της περιγραφικής μεταβλητής πάνω από κάποιο προκαθορισμένο σύνολο $k = 0, 1, \ldots, N$. Θεωρώντας την αναλυτική μορφή (2.26) της (2.9) για μηδενικές εισόδους είναι προφανές ότι ο χώρος λύσεων της ομογενούς εξίσωσης

$$Ex_{k+1} = Ax_k, k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.33}$$

είναι ένας υποχώρος του χώρου των επιτρεπτών περιγραφικών διανυσμάτων $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Ο υποχώρος αυτός δεν είναι άλλος από τον μηδενικό χώρο του πίνακα A_N. Στην περίπτωση των κανονικών περιγραφικών συστημάτων που η επιλυσιμότητα και η συνθηκολογησιμότητα είναι δεδομένες, η διάσταση του $\ker A_N$ είναι n, γεγονός που συνεπάγεται ότι υπάρχουν ακριβώς n βαθμοί ελευθερίας στην επιλογή των αυθαίρετων παραμέτρων που μπορούν να επιλεχθούν. Στα συστήματα του χώρου των καταστάσεων οι n αυτοί παράμετροι επιλέγονται σαν αρχικές συνθήκες του συστήματος, δηλαδή ταυτίζονται με την αρχική τιμή $x_0 \in \mathbb{R}^n$ που επιλέγεται αυθαίρετα. Στην γενική περιγραφική μορφή κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητα δυνατό. Αντίθετα η επιλογή των n ανεξάρτητων μεταβλητών κατανέμεται στα δύο άκρα του διαστήματος $k = 0, 1, \ldots, N$, χωρίς όμως να είναι συμβιβαστή οποιαδήποτε επιλογή ζευγών x_0, x_N.
Με βάση αυτή τη λογική ο D.G. Luenberger πρότεινε στην [14] την έννοια της *εξίσωσης απεικόνισης συνοριακών συνθηκών*. Η εξίσωση αυτή έχει την μορφή γραμμικών περιορισμών που θέτει το περιγραφικό σύστημα στα άκρα του πεπερασμένου χρονικού διαστήματος $[0, N]$.

Ορισμος 2.9 [14] *Μια συνοριακή απεικόνιση που αντιστοιχεί στην ομογενή περιγραφική εξίσωση (2.33) είναι ένας πίνακας $Z(0, N) = [Z_0, Z_N] \in R^{n\times 2n}$ που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$Z_0x_0 + Z_Nx_N = 0 \tag{2.34}$$

έτσι ώστε για τα x_0, x_N να υπάρχουν ενδιάμεσες τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$, οι οποιές σε συνδυασμό με τις συνοριακές τιμές ικανοποιούν την ομογενή περιγραφική εξίσωση.

Σε σχέση με τον παραπάνω ορισμό είναι σαφές ότι η εξίσωση (2.34) αντικαθιστά στην ουσία την (2.33) σε ότι αφορά τους περιορισμούς στις συνοριακές τιμές. Κατά αυτή την έννοια η εξίσωση απεικόνισης συνοριακών συνθηκών είναι μια ισοδύναμη περιγραφή του συστήματος, αφού όπως φάνηκε παραπάνω οι περιορισμοί των συνοριακών τιμών χαρακτηρίζουν εξ'ολοκλήρου το χώρο λύσεων. Παρατηρήστε ωστόσο ότι ο πίνακας της συνοριακής απεικόνισης $Z(0, N)$ δεν είναι μοναδικός αφού, ο πολλαπλασιασμός της εξίσωσης (2.34) από αριστερά με οποιοδήποτε αντιστρέψιμο πίνακα $n \times n$, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της απεικόνισης.

Σημειώνουμε επίσης ότι ο συμβολισμός $Z(0, N)$ έχει νόημα ακόμη και αν την θέση των $0, N$ πάρουν ακέραιοι k, l με την ιδιότητα $0 \leq k < l \leq N$, αφού σε αυτή την περίπτωση η συνοριακή απεικόνιση εκφράζει τους περιορισμούς που θέτει το σύστημα για τα x_k, x_l. Κατά αυτή την έννοια ο πίνακας απεικόνισης συνοριακών συνθηκών μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση του πίνακα μετάβασης που συναντάται σε συστήματα του χώρου των καταστάσεων. Για να γίνει πιο ξεκάθαρο αυτό θεωρούμε το σύστημα

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{2.35}$$

Ο πίνακας μετάβασης του συστήματος $\Phi(0, N) = A^N$ εκφράζει την σχέση μεταξύ των x_0, x_N, αφού ισχύει $x_N = \Phi(0, N)x_0$ ή ισοδύναμα $\Phi(0, N)x_0 - x_N = 0$. Αντίστοιχα ο πίνακας μετάβασης για δύο τυχαίες χρονικές στιγμές k, l, είναι $\Phi(k, l) = A^{k-l}$. Η σχέση αυτή δεν είναι παρά μια ειδική μορφή της απεικόνισης συνοριακών συνθηκών αφού μπορούμε να γράψουμε

$$Z(k, l) = [A^{k-l}, -I]$$

Με αυτή τη λογική η γενική μορφή του πίνακα απεικόνισης συνοριακών συνθηκών δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια πεπλεγμένη μορφή του πίνακα μετάβασης.

Το παρακάτω θεώρημα εκφράζει τη σχέση μεταξύ της συνοριακής απείκονισης και των εννοιών της επιλυσιμότητας και της συνθηκολογησιμότητας που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Για να παρουσιάσουμε το αποτέλεσμα σε όλη του την γενικότητα, αποσύρουμε προσωρινά την υπόθεση της κανονικότητας για το περιγραφικό μας σύστημα.

Θεωρημα 2.10 [14] *Για το (πιθανόν μη κανονικό) ομογενές περιγραφικό σύστημα (2.33), υπάρχει μια συνοριακή απεικόνιση $Z(k, l)$, $0 \leq k < l \leq N$ με $rank Z(k, l) = n$, αν και μόνο εάν το σύστημα (2.33) είναι επιλύσιμο και συνθηκολογήσιμο στο σύνολο* $0, 1, 2, \ldots, N$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{2n}$ το σύνολο των (x_0, x_N) που είναι αποδεκτές επεκτάσεις λύσεων της εξίσωσης (2.33), $x_1, x_2, \ldots x_{N-1}$. Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι η προβολή όλων των λύσεων στο χώρο $\mathbb{R}^{2n}$ των (x_0, x_N). Προφανώς η ύπαρξη ενός πίνακα συνοριακής απεικόνισης $Z(0, N)$ με πλήρη τάξη γραμμών είναι ισοδύναμη με την απαίτηση η διάσταση του $\mathcal{B}$ να είναι $\dim \mathcal{B} = n$.

Υποθέτουμε ότι $\dim \mathcal{B} > n$. Αυτό συνεπάγεται ότι η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι μεγαλύτερη από n, οπότε το σύστημα δεν είναι επιλύσιμο. Αντίστοιχα υποθέτουμε $\dim \mathcal{B} < n$. Αφού η διάσταση του χώρου λύσεων είναι είναι τουλάχιστον n, πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικές ενδιάμεσες λύσεις που αντιστοιχούν σε ίδιες συνοριακές τιμές x_0, x_N. Άρα το σύστημα δεν είναι συνθηκολογήσιμο. Οι δύο αυτές υποθέσεις αποδεικνύουν ότι η επιλυσιμότητα και η συνθηκολογησιμότητα συνεπάγονται $rank Z(0, N) = n$ και αντίστροφα.

Η απόδειξη είναι εντελώς αντίστοιχη για την περίπτωση του $Z(k, l)$ αφού οι ιδιότητες της επιλυσιμότητας και η συνθηκολογησιμότητας εξακολουθούν να ισχύουν για οποιοδήποτε υποσύνολο του $0, 1, 2, ..., N$. ■

Γίνεται προφανές ότι όταν ένα σύστημα είναι επιλύσιμο και συνθηκολογήσιμο ουσιαστικά η αναδρομική περιγραφική εξίσωση που συνδέει διαδοχικές χρονικές στιγμές της μεταβλητής x_k, ισοδυναμεί με την συνοριακή απεικόνιση που συνδέει πλέον μακρινές χρονικές στιγμές της x_k. Η εξίσωση αυτή χαρακτηρίζει πλήρως το σύστημα αφού, αφενός οποιαδήποτε λύση του συστήματος ικανοποιεί την συνοριακή απεικόνιση με τα άκρα της, αφετέρου οποιδήποτε ζεύγος (x_0, x_N) την ικανοποιεί χαρακτηρίζει μοναδικά τις ενδιάμεσες τιμές που αποτελούν λύση για το σύστημα.

2.5 Αναδρομή συνοριακής απεικόνισης

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μια αναδρομική μέθοδο επίλυσης της ομογενούς περιγραφικής εξίσωσης, που βασίζεται στην έννοια της συνοριακής απεικόνισης. Η μέθοδος αυτή οφείλεται στον Luenberger και παρουσιάστηκε στην γενική της μορφή για χρονικά μεταβαλόμενα συστήματα στην [14] . Στην περίπτωση μας θα περιοριστούμε στην κανονική, χρονικά αμετάβλητη εξίσωση οπότε οι ιδιότητες επιλυσιμότητας και συνθηκολογησιμότητας είναι δεδομένες. Άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων αυτών είναι

σύμφωνα με το αποτέλεσμα της προηγούμενης παραγράφου η ύπαρξη μιας συνοριακής απεικόνισης $rankZ(k,l) = n$ για κάθε k, l στο σύνολο $0, 1, \ldots, N$.
Ο αλγόριθμος ξεκινά θεωρώντας την ομογενή εξίσωση (2.33) πάνω από το σύνολο $k = 0, 1$. Στην τετριμένη αυτή περίπτωση ο πίνακας της συνοριακής απεικόνισης είναι προφανώς

$$Z(0,1) = [-A, E]$$

Ο πίνακας $Z(0,1)$ έχει προφανώς πλήρη τάξη γραμμών. Θεωρούμε τώρα την ομογενή εξίσωση (2.26) πάνω από το σύνολο $k = 0, 1, 2$. Λόγω της κανονικότητας ο πίνακας στο αριστερό μέλος της (2.26) έχει πλήρη τάξη γραμμών άρα θα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $2n \times 2n$, ο οποίος πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (2.26) δίνει

$$\begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & E & 0 \\ 0 & -A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.36}$$

$$\begin{bmatrix} Z_0 & 0 & Z_2 \\ X & I & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.37}$$

Οι υποπίνακες F, G, H, J είναι διάστασης $n \times n$ και επιλέγονται έτσι ώστε ο συνολικός $2n \times 2n$ πίνακας να εκφράζει τις πράξεις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που απαιτούνται για να επιτευχθεί η μορφή (2.37). Προφανώς ο υποπίνακας $[Z_0, 0, Z_2]$ έχει πλήρη τάξη γραμμών αφού και ο συνολικός πίνακας έχει πλήρη τάξη. Ο συμβολισμός Z_0, Z_2 δεν είναι τυχαίος αφού ο πίνακας $[Z_0, Z_2]$ δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα πίνακα συνοριακής απεικόνισης για το σύνολο $0 \ldots 2$. Επιπλέον η μορφή της δεύτερης γραμμής μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το x_1 δεδομένων των x_0, x_2, ως $x_1 = -Xx_0 - Yx_2$. Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες μπλοκ γραμμές του πίνακα στο αριστερό μέλος της (2.26) με αυτές του πίνακα στην (2.37) έχουμε

$$\begin{bmatrix} Z_0 & 0 & Z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ X & I & Y & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & -A & E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & -A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = 0 \tag{2.38}$$

Η εξίσωση (2.26) δεν έχει αλλοιωθεί αφού ουσιαστικά πολλαπλασιάσαμε από αριστερά με ένα αντιστρέψιμο πίνακα $nN \times nN$. Είναι φανερό ότι η μεταβλητή x_1 μπορεί ουσιαστικά να διαγραφεί, όπως και η δεύτερη γραμμή του πίνακα αφού το x_1 μπορεί να υπολογιστεί δεδομένων των x_0, x_2. Οπότε η (2.38) ανάγεται στην

$$\begin{bmatrix} Z_0 & Z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -A & E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & -A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = 0$$

οπότε ο αριθμός των αγνώστων μείωθημε από $N+1$ σε N διανύσματα. Ο νέος πίνακας έχει επίσης πλήρη τάξη γραμμών οπότε η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί μέχρι να καταλήξουμε στο άνω άκρο του συνόλου και να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το x_{N-1} συναρτήσει των x_0, x_N. Είναι προφανές ότι ακολουθώντας αντίστροφη διαδρομή μπορούμε διαδοχικά να υπολογίσουμε τα $x_{N-2}, x_{N-3}, \ldots x_1$.

Δίνουμε αναλυτικά τα βήματα του παραπάνω αλγορίθμου

Αναδρομικός αλγόριθμος

- **Έναρξη:** Θέτουμε $Z(0,1) := [Z_{0,1}, Z_1] = [-A, E]$
- **Αναδρομή**: Δεδομένου του $Z(0,k) = [Z_{0,k}, Z_k]$ για $1 < k < N$, εντοπίζουμε αντιστρέψιμο πίνακα $2n \times 2n$, με τέσσερα μπλοκ $F_k, G_k, H_k, J_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} F_k & G_k \\ H_k & J_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_k \\ -A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

  Τότε $Z_{0,k+1} = F_k Z_{0,k}$ και $Z_{k+1} = G_k E$, οπότε $Z(0,k+1) = [F_k Z_{0,k}, G_k E]$, ενώ η τιμή του x_k υπολογίζεται από τον τύπο

$$x_k = -H_k Z_{0,k} x_0 - J_k E x_{k+1} \tag{2.39}$$

■

Είναι φανερό από την παραπάνω ανάλυση ότι η συνοριακή απεικόνιση $Z_0 x_0 + Z_N x_N = 0$ εκφράζει τους περιορισμούς που θέτει το σύστημα στα άκρα του διαστήματος. Για να καθοριστεί πλήρως μια λύση της ομογενούς εξίσωσης χρειάζονται επιπλέον n ανεξάρτητοι περιορισμοί στην επιλογή των x_0, x_N. Αυτό συνήθως εκφράζεται στην μορφή των γραμμικών συνοριακών συνθηκών, όπως η παρακάτω

$$W_0 x_0 + W_N x_N = w \tag{2.40}$$

όπου ο πίνακας $W(0,N) = [W_0, W_N] \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ έχει την ιδιότητα $rank W(0,N) = n$ και $w \in \mathbb{R}^n$ είναι αυθαίρετο διάνυσμα. Η ομογενής περιγραφική εξίσωση θα έχει μοναδική λύση εάν και μόνο εάν οι γραμμές του πίνακα $W(0,N)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες από αυτές του $Z(0,N)$.

Θεωρημα 2.11 *Μια συνοριακή συνθήκη της μορφής (2.40) καθορίζει μοναδικά μια λύση της (2.33) εάν και μόνο εάν*

$$rank \begin{bmatrix} Z(0,N) \\ W(0,N) \end{bmatrix} = 2n \tag{2.41}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια της παραπάνω ανάλυσης. ■

Για να πάρουμε μια λύση της (2.33) εφαρμόζουμε αρχικά τον αναδρομικό αλγόριθμο εντοπισμού της συνοριακή απεικόνισης $Z(0,N)$. Υποθέτοντας ότι μας δίνεται μια συνοριακή συνθήκη που ικανοποιεί την (2.41) και ένα αυθαίρετο διάνυσμα w, υπολογίζουμε τα x_0, x_N από την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(0,N) \\ W(0,N) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε διαδοχικά τα $x_{N-1}, x_{N-2}, \ldots, x_1$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.39), οπότε πετυχαίνουμε την μοναδική λύση που αντιστοιχεί στο αυθαίρετο διάνυσμα w.

Παραδειγμα 2.12 *Θεωρούμε το ομογενές περιγραφικό μοντέλο που περιγράφεται από του πίνακες E, A πάνω από σύνολο $k = 0, 1, 2$, όπου:*

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι $\det(\sigma E - A) = -\sigma \neq 0$, άρα το σύστημα είναι κανονικό και συνεπώς αυτόματα επιλύσιμο και συνθηκολογησιμο. Έστω P ο 6×6 πίνακας μεταθέσεων που φέρνει με πολλαπλασιασμό από αριστερά τον $[E^T, -A^T]^T$ στην μορφή:

$$P \begin{bmatrix} E \\ -A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Τότε για την αναπτυγμένη μορφή του συστήματος (2.26) έχουμε

$$P\begin{bmatrix} -A & E & 0 \\ 0 & -A & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ενώ αντίστοιχα

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $rank[Z_0, Z_N] = 3$ και η συνοριακή απεικόνιση έχει την μορφή

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_2 = 0 \tag{2.42}$$

Δεδομένων x_0, x_2 που ικανοποιούν την (2.42) μπορούμε να υπολογίσουμε την x_1 από τον τύπο

$$x_1 = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_0 - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_2$$

■

2.6 Μη-ομογενής αναδρομική λύση

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στην μη-ομογενή περίπτωση. Εφαρμόζοντας εντελώς αντίστοιχα την μέθοδο που εμφανίζεται στις (2.36), (2.37) έχουμε

$$\begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & E & 0 \\ 0 & -A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

$$\begin{bmatrix} Z_0 & 0 & Z_2 \\ X & I & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FBu_0 + GBu_1 \\ HBu_0 + JBu_1 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

οπότε θέτοντας $v_1 = FBu_0 + GBu_1$ μπορούμε να γράψουμε την μη-ομογενή συνοριακή απεικόνιση

$$Z_0x_0 + Z_2x_2 = v_1$$

Για λόγους συμβατότητας συμβολισμού θέτουμε επίσης $v_0 = Bu_0$. Διαγράφοντας τον άγνωστο x_1 και την δεύτερη γραμμή από την αντίστοιχη μη-ομογενή (2.38) έχουμε την εξίσωση ισοδύναμη με την (2.26)

$$\begin{bmatrix} Z_0 & Z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -A & E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & -A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ Bu_2 \\ \vdots \\ Bu_{N-1} \end{bmatrix}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπρορούμε να ελλατώνουμε συνεχώς των αριθμό των αγνώστων μέχρι να καταλήξουμε στο άνω άκρο του διαστήματος. Συνοψίζουμε τον παραπάνω αλγόριθμο:

Αναδρομικός αλγόριθμος

- **Έναρξη:** Θέτουμε $Z(0,1) := [Z_{0,1}, Z_1] = [-A, E]$, $v_0 = Bu_0$
- **Αναδρομή**: Δεδομένου του $Z(0,k) = [Z_{0,k}, Z_k]$ για $1 < k < N$, εντοπίζουμε αντιστρέψιμο πίνακα $2n \times 2n$, με τέσσερα μπλοκς $F_k, G_k, H_k, J_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} F_k & G_k \\ H_k & J_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_k \\ -A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Τότε $Z_{0,k+1} = F_kZ_{0,k}$ και $Z_{k+1} = G_kE$, οπότε $Z(0,k+1) = [F_kZ_{0,k}, G_kE]$, ενώ η τιμή του x_k υπολογίζεται από τον τύπο

$$x_k = -H_kZ_{0,k}x_0 - J_kEx_{k+1} + H_kv_{k-1} + J_ku_k \qquad (2.45)$$

■

Είναι προφανές ότι δεδομένων των εισόδων $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ και των συνοριακών τιμών x_0, x_N μπορούμε διαδοχικά να εντοπίσουμε τις ενδιάμεσες τιμές $x_{N-1}, x_{N-2}, \ldots, x_1$. Ένας ειδικότερος τρόπος εφαρμογής της παραπάνω μεθόδου αναφέρεται σε μια ειδική ανάλυση των πινάκων E, A που μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλους μετασχηματισμούς. Είναι γνωστό [3] ότι για κάθε κανονικό πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $\sigma E - A$, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε

$$M(\sigma E - A)N = \begin{bmatrix} \sigma I - A_f & 0 \\ 0 & \sigma E_b - I \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

όπου $A_f \in \mathbb{R}^{n_f\times n_f}$ και $E_b \in \mathbb{R}^{n_b\times n_b}$ με $n_f + n_b = n$. Οι δείκτες f, b προέρχονται αντίστοιχα από τις λέξεις forward και backward. Η παραπάνω ανάλυση δεν είναι μοναδική αφού οι διαστάσεις των A_f, E_b μπορεί να διαφέρουν από ανάλυση σε ανάλυση. Για παράδειγμα στον βέλτιστο έλεγχο είναι συνήθες οι πίνακες A_f, E_b να έχουν τις ιδιοτιμές τους μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Ειδικά στην περίπτωση που ο πίνακας E_b είναι μηδενοδύναμος (nilpotent) η ανάλυση αυτή ονομάζεται κανονική μορφή του Weierstrass. Κάθε σύστημα της μορφής (2.9) μπορεί να αναχθεί σε ένα ισοδύναμο του με τους πίνακες E, A στην παραπάνω ανάλυση και περιγραφική μεταβλητή $\hat{x}_k := N^{-1}x_k$.

Υποθέτοντας ότι το υπό μελέτη σύστημα βρίσκεται ήδη στην αναλυμένη μορφή του, μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι

$$\begin{aligned} F_k &= \begin{bmatrix} A_f & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \; G_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E_b^k \end{bmatrix} \\ H_k &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; J_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\ Z(0,k) &= \begin{bmatrix} -A_f^k & 0 & I & 0 \\ 0 & -I & 0 & E_b^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Δεδομένης μιας συνοριακής συνθήκης $W(0, N) = [W_0, W_N]$ μια μοναδική λύση μπορεί να εντοπιστεί εάν και μόνο εάν

$$rank \begin{bmatrix} & W_0 & & W_N \\ -A_f^k & 0 & I & 0 \\ 0 & -I & 0 & E_b^k \end{bmatrix} = 2n$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την λύση.

2.7 Forward - Backward ανάλυση

Γενικεύοντας την μέθοδο λύσης που βασίζεται στην ανάλυση του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $\sigma E - A$ που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, F. Lewis παρουσίασε στην [7] μια γεωμετρική πρόσεγγιση στο πρόβλημα. Η βασική ιδέα πίσω από την μέθοδο είναι, είναι ότι κάθε κανονικό περιγραφικό σύστημα μπορεί με κατάλληλους μετασχηματισμούς της μορφής (2.46) να αναλυθεί σε δύο απλούστερα συστήματα που μπορούν εύκολα να επιλυθούν.

Η μέθοδος της forward - backward ανάλυσης στηρίζεται στην έννοια του deflating υποχώρου του ζεύγους (E, A), που αποτελεί μια γενίκευση των αναλλοίωτων υποχώρων ενός πίνακα A. Είναι γνωστό ότι ο υποχώρος $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται αναλλοίωτος υποχώρος του A εάν-ν $A\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$. Γενικεύοντας την έννοια του αναλλοίωτου υποχώρου ο υποχώρος $\mathcal{J}$ ονομάζεται deflating υποχώρος του ζέυγους E, A εάν-ν $\dim(E\mathcal{J} + A\mathcal{J}) = \dim(\mathcal{J})$. Προφανώς ο ορισμός του deflating υποχώρου ταυτίζεται με αυτόν του αναλλοίωτου υποχώρου για το ζέυγος A, I. Για ένα κανονικό πρωτοβάθμιο πίνακα $\sigma E - A$ έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Λημμα 2.13 [7] *Έστω ένα κανονικός πρωτοβάθμιος πίνακας $\sigma E - A$ και $\mathcal{J}, \mathcal{G}$ δύο deflating υποχώροι του ζεύγους E, A με την ιδιότητα $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$. Τότε*

$$(E\mathcal{J} + A\mathcal{J}) \oplus (E\mathcal{G} + A\mathcal{G}) = \mathbb{R}^n$$

■

Έστω δυο deflating υποχώροι με την ιδιότητα $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $\acute{\mathcal{F}} = (E\mathcal{J} + A\mathcal{J})$ και $\acute{\mathcal{G}} = (E\mathcal{G} + A\mathcal{G})$, οπότε σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα $\acute{\mathcal{F}} \oplus \acute{\mathcal{G}} = \mathbb{R}^n$. Μετασχηματίζουμε τώρα την (2.9) σε νέες βάσεις σύμφωνα με τις αναλύσεις του χώρου $\mathbb{R}^n$ σε $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ και $\acute{\mathcal{F}} \oplus \acute{\mathcal{G}} = \mathbb{R}^n$. Δηλαδή εντοπίζουμε πίνακες $\bar{V}, \hat{V}, \bar{U}, \hat{U}$ έτσι ώστε $\mathcal{J} = R(\bar{V})$, $\mathcal{G} = R(\hat{V})$, $\acute{\mathcal{F}} = R(\bar{U})$, $\acute{\mathcal{G}} = R(\hat{U})$ και ορίζουμε $V = [\bar{V}, \hat{V}]$ και $U = [\bar{U}, \hat{U}]$. Τότε

$$U^{-1}[\sigma E - A, B]V = \begin{bmatrix} \sigma\bar{E} - \bar{A} & 0 & \bar{B} \\ 0 & \sigma\hat{E} - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

όπου οι πίνακες $\bar{E}, \bar{A}, \hat{E}, \hat{A}, \bar{B}, \hat{B}$ ορίζονται από την (2.47). Ο μετασχηματισμός αυτός αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό του διανυσματικού χώρου της περιγραφικής μεταβλητής της μορφής $T = V^{-1}$. Οπότε η νέα περιγραφική μεταβλητή είναι

$$\hat{x}_k = Tx_k \tag{2.48}$$

Μέχρι στιγμής δεν είναι ξεκάθαρο ποιο είναι το όφελος του παραπάνω μετασχηματισμού αφού οι πίνακες $\bar{E}, \bar{A}, \hat{E}, \hat{A}$ που περιγράφουν τα δύο υποσυστήματα δεν έχουν γενικά καμιά ιδιαίτερη ιδιότητα. Θέτουμε λοιπόν κάποιους περιορισμούς στην επιλογή των υποχώρων $\mathcal{J}, \mathcal{G}$, ώστε να πετύχουμε $\bar{E}, \hat{A}$ αντιστρέψιμους, γεγονός που μας επιτρέπει να επιλύσουμε αναδρομικά τις εξισώσεις.

Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο επιστρατεύουμε δύο αναδρομικούς αλγορίθμους που εμφανίζονται στην [19] . Έστω $\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_k \subset \mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\mathcal{X}_{k+1} = A^{-1}(E\mathcal{X}_k),\ \mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^n \tag{2.49}$$

$$\mathcal{Y}_k = E^{-1}(A\mathcal{Y}_{k+1}),\ \mathcal{Y}_n = \mathbb{R}^n \tag{2.50}$$

για $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Το σύμβολο $(\cdot)^{-1}$ στην συγκεκριμένη περίπτωση σημαίνει αντίστροφη εικόνα του αντίστοιχου μετασχηματισμού.

Ορίζουμε [19] την *αρχική πολλαπλότητα* $H_I := \mathcal{X}_n$ και την *τελική πολλαπλότητα* $H_F := \mathcal{Y}_0$. Παρατηρούμε ότι $AH_I \subset EH_I$ και $EH_F \subset AH_F$, άρα H_I, H_F είναι deflating υποχώροι για το ζεύγος E, A. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεωρημα 2.14 [7] *Έστω $\sigma E - A$ ένας κανονικός πρωτοβάθμιος πίνακας και $\mathcal{J}, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ δύο deflating υποχώροι των E, A με $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $\mathcal{J} \subset H_I$ και $\mathcal{G} \subset H_F$. Τότε για τις βάσεις που χρησιμοποιούνται στις αναλύσεις $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ και $\acute{\mathcal{J}} \oplus \acute{\mathcal{G}} = \mathbb{R}^n$ οι πίνακες $\bar{E}$ και $\hat{A}$ είναι αντιστρέψιμοι.*

Απόδειξη. Ο πίνακας $\bar{E}$ είναι ο περιορισμός του E στο $\mathcal{J}$ με πεδίο τιμών $\acute{\mathcal{J}}$, $\acute{\mathcal{J}}|E|\mathcal{J}$. Έχει δειχθεί στην [19] ότι ο $E|H_I$ είναι ένα προς ένα εάν-ν ο $\sigma E - A$ είναι κανονικός. Οπότε $E|\mathcal{J}$, $\mathcal{J} \subset H_I$ είναι ένα προς ένα, άρα και $\acute{\mathcal{J}}|E|\mathcal{J}$ είναι ένα προς ένα. Παρόμοια ο $\hat{A}$ είναι $\acute{\mathcal{G}}|A|\mathcal{G}$, που είναι ένα προς ένα εάν-ν ο $\sigma E - A$ είναι κανονικός. Επιπλέον αφού οι $\bar{E}$ και $\hat{A}$ είναι τετράγωνοι εξαιτίας του περιοσμένου πεδίου τιμών τους, είναι αντιστρέψιμοι. ■

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να γράψουμε την παρακάτω forward - backward ανάλυση για την (2.9), που βασίζεται στην επιλογή deflating υποχώρων $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ για τον περιγραφικό χώρο. Έστω

$$\hat{x}_k = Tx_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_k^f \\ \hat{x}_k^b \end{bmatrix}$$

όπου $x_k^f \in \mathcal{J} \subset H_I$ και $x_k^b \in \mathcal{G} \subset H_F$. Τότε από την (2.47) σε συνδυασμό με το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{x}_{k+1}^f = \bar{E}^{-1}\bar{A}\hat{x}_k^f + \bar{E}^{-1}\bar{B}u_k \tag{2.51}$$

$$\hat{x}_k^b = \hat{A}^{-1}\hat{E}\hat{x}_{k+1}^b - \hat{A}^{-1}\hat{B}u_k \tag{2.52}$$

για $k = 0, 1, \dots N-1$. Τα συστήματα (2.51), (2.52) ονομάζονται αντίστοιχα forward υποσύστημα που μπορεί να λυθεί κανονικά προς τα εμπρός δεδομένου του $\hat{x}_0^f$ και backward υποσύστημα που μπορεί να λυθεί προς τα πίσω δεδομένου του $\hat{x}_N^b$.

Έστω $\langle A|B\rangle_N = R(B) + AR(B) + A^2R(B) + \dots + A^{N-1}R(B)$. Τότε από την (2.52) μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο των *συμβιβαστών αρχικών συνθηκών* για την συγκεκριμένη ανάλυση $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ ως

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{J} \oplus ((\hat{A}^{-1}\hat{E})^N \mathcal{G} + \left\langle \hat{A}^{-1}\hat{E}|\hat{A}^{-1}\hat{B}\right\rangle_N) \tag{2.53}$$

Παρόμοια χρησιμοποιώντας την (2.51) ορίζουμε τον χώρο των *τελικών συμβιβαστών συνθηκών* ως

$$\mathcal{X}_N = \mathcal{G} \oplus ((\bar{E}^{-1}\bar{A})^N \mathcal{J} + \left\langle \bar{E}^{-1}\bar{A}|\bar{E}^{-1}\bar{B}\right\rangle_N) \tag{2.54}$$

Η προσέγγιση αυτή δείχνει ξεκάθαρα ότι μπορούμε να επιλέξουμε τον τρόπο που εισάγονται οι επιπλεόν περιορισμοί για τον εντοπισμό μιας μοναδικής λύσης με διάφορους τρόπους. Η μέθοδος είναι άμεσα συγκρίσιμη με αυτή της προηγούμενης παραγράφου, όπου οι περιορισμοί αυτοί εκφράζονται κατά μη μοναδικό τρόπο από την συνοριακή απεικόνιση.

Δίνουμε τώρα μια κλειστή φόρμουλα λύσης που μπορεί να συγκριθεί με την μέθοδο της "διπλής σάρωσης" (double sweep) που παρουσιάζεται στην [12]. Αρχικά προσδιορίζουμε το $\hat{x}_k^f$ δεδομένων των αρχικών συνθηκών $\hat{x}_0^f$ για όλα τα k χρησιμοποιώντας την (2.51). Στην συνέχεια προσδιορίζουμε την προς τα πίσω σάρωση, και υπολογίζουμε τα $\hat{x}_k^b$ δεδομένων των $\hat{x}_N^f$ και $\hat{x}_N^b$. Πιο συγκεκριμένα γράφουμε

$$x_k = T^{-1}\hat{x}_k = \bar{V}\hat{x}_k^f + \hat{V}\hat{x}_k^b$$

και θέτοντας $T = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \hat{T} \end{bmatrix}$

$$\hat{x}_{k+1}^b = \hat{T}x_{k+1}$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} x_N &= \bar{V}\hat{x}_N^f + \hat{V}\hat{x}_N^b \\ x_k &= \bar{V}\hat{x}_k^f + \hat{V}\hat{A}^{-1}\hat{E}\hat{T}x_{k+1} - \hat{V}\hat{A}^{-1}\hat{B}u_k \end{aligned}$$

για $k = 0, 1, 2, \dots N-1$.

Στην περίπτωση που επιθυμούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα όσο το δυνατόν περισσότερες αρχικές ή τελικές συνθήκες πρέπει να διαλέξουμε κατάλληλα την ανάλυση $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποίουμε την αναδρομική σχέση (2.50) και ορίζουμε

$$H_{NI} = \mathcal{Y}_o \text{ για } \mathcal{Y}_n = 0$$

Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεωρημα 2.15 [7] *Έστω $\mathcal{J} = H_I$ και $\mathcal{G} = H_{NI}$. Τότε $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{G} \subset H_F$ οπότε έχουμε μια forward - backward ανάλυση του συστήματος και επιπλέον*
α) $\hat{A}^{-1}\hat{E}$ είναι μηδενοδύναμος
β) Ο χώρος $\mathcal{J}$ είναι ομέγιστος υποχώρος που καθιστά τον πίνακα $\bar{E} = \not{\mathcal{J}}|E|\mathcal{J}$ αντιστρέψιμο.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{G} = H_N$ όπως ορίζεται στην [19] και χρησιμοποιούμε τα εκεί αποτελέσματα. ■

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να επιλέξουμε μια μέγιστη forward ανάλυση για το σύστημα μας, η οποία μας επιτρέπει να επιλέξουμε αυθαίρετα όσο το δυνατόν περισσότερες αρχικές συνθήκες. Η ανάλυση αυτή αντιστοιχεί με την ανάλυση του πρωτοβάθμιου πίνακα $\sigma E - A$ στην Weierstrass κανονική μορφή του.

Αντίστοιχα για την αντίθετη περίπτωση θέτουμε στην (2.49) $\mathcal{X}_0 = 0$ και ορίζουμε $H_{NF} = \mathcal{X}_N$, οπότε έχουμε το παρακάτω

Θεωρημα 2.16 [7] *Έστω $\mathcal{G} = H_F$ και $\mathcal{J} = H_{NF}$. Τότε $\mathcal{J} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{J} \subset H_I$ οπότε έχουμε μια forward - backward ανάλυση του συστήματος και επιπλέον*
α) $\bar{E}^{-1}\bar{A}$ είναι μηδενοδύναμος
β) Ο χώρος $\mathcal{G}$ είναι ο μέγιστος υποχώρος που καθιστά τον πίνακα $\bar{A} = \not{\mathcal{G}}|A|\mathcal{G}$ αντιστρέψιμο.

Απόδειξη. Παρόμοια με το προηγούμενο θεώρημα. ■

Επιλέγοντας $\mathcal{G} = H_F$ και $\mathcal{J} = H_{NF}$ πετυχαίνουμε μια μέγιστη backward ανάλυση του συστήματος, η οποία μας επιτρέπει να επιλέξουμε αυθαίρετα όσο το δυνατόν περισσότερες τελικές συνθήκες.

Σημειώστε ότι χρησιμοποιώντας την ανάλυση που παρουσιάζεται στην [19] μπορεί να αποδειχθεί ότι στην περίπτωση της μέγιστης forward ανάλυσης, η διάσταση του forward υποχώρου οπότε και ο αριθμός των αυθαίρετων αρχικών συνθηκών είναι $\deg|\sigma E - A|$. Στην αντίθετη περίπτωση η διάσταση του μέγιστου backward υποχώρου είναι $\deg|\sigma A - E|$.

Παραδειγμα 2.17 [7] *Έστω το σύστημα*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 27 & 22 & 17 \\ -18 & -14 & -10 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.49) και (2.50) υπολογίζουμε τους υποχώρους

$$\begin{aligned} H_I &= R(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -2 \\ -13 & 1 \end{bmatrix}), H_F = R(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -2 \\ -13 & 1 \end{bmatrix}) \\ H_{NI} &= R(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}), H_{NF} = R(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}) \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $H_{NI} \subset H_F$ και $H_{NF} \subset H_I$.

α) Μέγιστη forward ανάλυση

Επιλέγουμε $\mathcal{J} = H_I, \mathcal{G} = H_{NI}$, οπότε έχουμε

$$V = T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 8 & -2 & -2 \\ -13 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\acute{\mathcal{F}} = E\mathcal{J} + A\mathcal{J} = R(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix})$$

$$\acute{\mathcal{G}} = E\mathcal{G} + A\mathcal{G} = R(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix})$$

οπότε

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Άρα το αρχικό σύστημα αναλύεται

$$\begin{aligned} \hat{x}^f_{k+1} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}^f_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_k,\ \hat{x}^f_0 \text{ δίνεται} \\ \hat{x}^b_k &= -\frac{1}{9} u_k,\ \hat{x}^b_N \text{ δίνεται} \end{aligned}$$

α) Μέγιστη backward ανάλυση

Αντίστοιχα θέτουμε $\mathcal{J} = H_{NF}, \mathcal{G} = H_F$, οπότε

$$V = T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\not{\mathcal{F}} = E\mathcal{J} + A\mathcal{J} = R(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix})$$

$$\not{\mathcal{G}} = E\mathcal{G} + A\mathcal{G} = R(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix})$$

και

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε την ανάλυση

$$\begin{aligned} \hat{x}^f_{k+1} &= -u_k,\ \hat{x}^f_0 \text{ δίνεται} \\ \hat{x}^b_k &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}^b_{k+1} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} u_k,\ \hat{x}^b_N \text{ δίνεται} \end{aligned}$$

■

2.8 Λύση με τη χρήση του θεμελιώδους πίνακα

Μια μέθοδος λύσης της (2.9) που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής όσο και από υπολογιστικής άποψης είναι αυτή που βασίζεται στη χρήση του θεμελιώδους πίνακα (fundamental matrix). Η μέθοδος καθώς και πολλές σημαντικές αλγεβρικές ιδιότητες του πίνακα αυτού παρουσιάζονται στην [8] . Οι λύσεις που μπορούν να υπολογιστούν με βάση τη μέθοδο αυτή κατατάσονται σε τρείς κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο αντιμετώπισης του συστήματος (2.9) και κατά συνέπεια την επιλογή του χρονικού διαστήματος. Στην περίπτωση που το σύστημα (2.9) αντιμετωπίζεται σαν πρόβλημα συνοριακών συνθηκών πάνω από το πεπερασμένο σύνολο $k = 0, 1, 2, \ldots N$ έχουμε ένα κλειστό τύπο υπολογισμού της λεγόμενης συμμετρικής λύσης. Αντίθετα σε περίπτωση που τα χρονικά διαστήματα είναι μη πεπερασμένα όπως το $\mathbb{Z}^+$ ή το $\mathbb{Z}^-$, έχουμε λύσεις προς τα εμπρός και προς τα πίσω αντίστοιχα. Επιπλέον της σημαντικής της ευελιξίας, η μέθοδος παρουσιάζει το πλεονέκτημα της σχετικά απλής υπολογιστικής υλοποίησης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μια γενίκευση της συγκεκριμένης μεθόδου σε συστήματα βαθμού μεγαλυτέρου του πρώτου παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 5.

Δεδομένης της συνθήκης κανονικότητας του πρωτοβάθμιου πίνακα $(\sigma E - A)$, $\det(\sigma E - A) \neq 0$ για σχεδόν κάθε $\sigma \in \mathbb{C}$, που εμφανίζεται στην (2.9), μπορούμε να γράψουμε το ανάπτυγμα Laurent του $(\sigma E - A)^{-1}$ στην περιοχή του $\sigma = \infty$, το οποίο έχει την μορφή

$$(\sigma E - A)^{-1} = \sigma^{-1} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i \sigma^{-i}, |\sigma| > \rho > 0 \tag{2.55}$$

Ορισμος 2.18 *Η ακολουθία πινάκων Φ_i, $i = -\mu, -\mu + 1, \ldots, \infty$, που ορίζεται από την σχέση (2.55) ονομάζεται προς τα εμπρός θεμελιώδης πίνακας του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $(\sigma E - A)$.* ■

Αντίστοιχα αν το ανάπτυγμα Laurent του $(\sigma E - A)^{-1}$ στην περιοχή του $\sigma = 0$ έχει την μορφή

$$(\sigma E - A)^{-1} = \sum_{i=-p}^{\infty} V_{-i} \sigma^{i}, |\sigma| < \rho \tag{2.56}$$

έχουμε:

Ορισμος 2.19 *Η ακολουθία πινάκων V_i, $i = -p, -p + 1, \ldots + \infty$, που ορίζεται από την σχέση (2.56) ονομάζεται προς τα πίσω θεμελιώδης πίνακας του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $(\sigma E - A)$.* ■

Στο εξής με τον όρο θεμελιώδης πίνακας θα εννοείται ο προς τα εμπρός θεμελιώδης πίνακας εκτός αν αναφέρεται σαφώς το αντίθετο.

Στην περίπτωση του συστήματος που περιγράφεται στο χώρο των καταστάσεων, δηλ. $E = I$, αποδεικνύεται εύκολα ότι $\Phi_i = 0$ για $i < 0$ και $\Phi_i = A^i$ για $i \geq 0$.

Ο θεμελιώδης πίνακας έχει πολλές αξιοσημείωτες αλγεβρικές ιδιότητες οι οποίες άλλωστε τον καθιστούν και τόσο σημαντικό στην μελέτη των γραμμικών συστημάτων. Αναφέρουμε ενδεικτικά μερικές από αυτές

Θεωρημα 2.20 [8] *Έστω $(\sigma E - A)$ κανονικός και Φ_i ο θεμελιώδης πίνακας του. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $\Phi_i E - \Phi_{i-1} A = I\delta_i$, όπου $\delta_0 = 1$ και $\delta_i = 0$ για $i \neq 0$
2. $E\Phi_i - A\Phi_{i-1} = I\delta_i$
3. $\Phi_i = (\Phi_0 A)^i \Phi_0$, για $i \geq 0$
4. $\Phi_i = (\Phi_{-1} E)^{-i-1} \Phi_{-1}$ για $i < 0$

5. $\Phi_i E \Phi_j = \Phi_j E \Phi_i$

6. $\Phi_i E \Phi_j = \begin{cases} -\Phi_{i+j}, & i < 0, j < 0 \\ \Phi_{i+j}, & i \geq 0, j \geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

7. $\Phi_i A \Phi_j = \begin{cases} -\Phi_{i+j+1}, & i < 0, j < 0 \\ \Phi_{i+j+1}, & i \geq 0, j \geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

■

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τέσσερις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις που θα φανούν χρήσιμες στην συνέχεια.

Πορισμα 2.21 *Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\Phi_0 E \Phi_i = \begin{cases} \Phi_i, & i \geq 0 \\ 0, & i < 0 \end{cases}$

2. $-\Phi_{-1} A \Phi_i = \begin{cases} 0, & i \geq 0 \\ \Phi_i, & i < 0 \end{cases}$

3. $-\Phi_{-1} E \Phi_i = \begin{cases} 0, & i \geq 0 \\ \Phi_{-i}, & i < 0 \end{cases}$

4. $\Phi_0 A \Phi_i = \begin{cases} \Phi_{i+1}, & i \geq 0 \\ 0, & i < 0 \end{cases}$

■

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω ο θεμελιώδης πίνακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό λύσεων της (2.9) διαφόρων μορφών. Μια από αυτές είναι η περίπτωση που το σύστημα θεωρείται ως μια αναδρομική προς τα εμπρός, οπότε έχουμε δεδομένες αρχικές συνθήκες στο $k = 0$ και ζητείται η εξέλιξη της ακολουθίας $k = 0, 1, 2, \ldots$ συναρτήσει των εισόδων. Αυτό το είδος λύσης ονομάζεται προς τα εμπρός λύση της (2.9). Έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεωρημα 2.22 *Η προς τα εμπρός λύση της (2.9) υπάρχει εάν-ν η αρχική τιμή x_0 ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$A\Phi_{-1}Ax_0 = -\sum_{i=0}^{\mu-1} A\Phi_{-i-1}Bu_i \tag{2.57}$$

οπότε η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$x_k = \Phi_k E x_0 + \sum_{i=0}^{k+\mu-1} \Phi_{k-i-1}Bu_i, \ k \geq 1 \tag{2.58}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Για $k = 1$ η (2.58) γίνεται

$$x_1 = \Phi_1 E x_0 + \sum_{i=0}^{\mu} \Phi_{-i} B u_i \tag{2.59}$$

Για να ικανοποιεί το x_1 την (2.9) πρέπει

$$E x_1 = A x_0 + B u_0$$

ισοδύναμα χρησιμοποιόντας την (2.59) και τις ιδιότητες του θεμελιώδους πίνακα έχουμε

$$\begin{aligned}
E\Phi_1 E x_0 + \sum_{i=0}^{\mu} E\Phi_{-i} B u_i &= A x_0 + B u_0 \\
A\Phi_0 E x_0 + \sum_{i=0}^{\mu} (I\delta_{-i} + A\Phi_{-i-1}) B u_i &= A x_0 + B u_0 \\
A(\Phi_0 E x_0 + \sum_{i=0}^{\mu} \Phi_{-i-1} B u_i) + B u_0 &= A x_0 + B u_0 \\
A(\Phi_0 E - I) x_0 &= -\sum_{i=0}^{\mu-1} A\Phi_{-i-1} B u_i \\
A\Phi_{-1} A x_0 &= -\sum_{i=0}^{\mu-1} A\Phi_{-i-1} B u_i
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση δεν είναι άλλη από την (2.57). Αν το x_0 ικανοποιεί την σχέση αυτή ο τύπος της λύσης ισχύει για $k = 1$. Για $k + 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
E x_{k+1} &= \\
E\Phi_{k+1} E x_0 + \sum_{i=0}^{k+\mu} E\Phi_{k-i} B u_i &= \\
(I\delta_{k+1} + A\Phi_k) E x_0 + \sum_{i=0}^{k+\mu} (I\delta_{k-i} + A\Phi_{k-i-1}) B u_i &= \\
A(\Phi_k E x_0 + \sum_{i=0}^{k+\mu} \Phi_{k-i-1} B u_i) + B u_k &= \\
A(\Phi_k E x_0 + \sum_{i=0}^{k+\mu-1} \Phi_{k-i-1} B u_i) + B u_k &= A x_k + B u_k
\end{aligned}$$

Άρα ο τύπος ισχύει για κάθε $k \geq 1$. ■

Σημειώστε ότι αντίστοιχη της συνθήκης συμβατότητας (2.57) δεν εμφανίζεται στην [8] .

Όπως είναι προφανές από τις σχέσεις (2.57) και (2.58) το σύστημα (2.9) στην γενική του μορφή δεν είναι αιτιατό, ακόμη και στην περίπτωση που θεωρείται σαν αναδρομική σχέση προς τα εμπρός. Αύτο είναι ξεκάθαρο από το γεγονός ότι τόσο το x_0, όσο και το x_k εξαρτάται από τις $\mu - 1$ μελλοντικές εισόδους. Η μη αιτιότητα του συστήματος εξαρτάται άμεσα από την παρουσία στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο του πίνακα $\sigma E - A$, αφού αποδεικνύεται ότι ο δείκτης $\mu - 1$ ισούται με την μεγαλύτερη τάξη των μηδενικών (ή διαρετών) του πίνακα στο άπειρο. Στην περίπτωση που η μέγιστη τάξη μηδενικών στο άπειρο του $\sigma E - A$ είναι μηδέν (δηλ. $\mu = 1$), το x_k εξαρτάται το πολύ από το u_k, οπότε έχουμε απλά παρουσία μη δυναμικών μεταβλητών. Όταν $E = I$ (ή γενικότερα E αντιστρέψιμος) το σύστημα ανάγεται στο χώρο των καταστάσεων οπότε το x_k εξαρτάται μόνο από παρελθούσες εισόδους, οπότε το σύστημα είναι αυστηρά αιτιατό.

Μια ενδιαφέρουσα ανάλυση του τύπου (2.58) έχει να κάνει με το γεγονός ότι η θεμελιώδης ακολουθία Φ_k μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει των Φ_0, Φ_{-1} χρησιμοποιόντας τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Η σχέσεις (2.57) και (2.58) μπορούν να γραφούν αντίστοιχα:

$$A\Phi_{-1}Ax_0 = -\sum_{i=0}^{\mu-1} A(-\Phi_{-1}E)^i\Phi_{-1}Bu_i \tag{2.60}$$

και

$$x_k = (\Phi_0 A)^k\Phi_0 Ex_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(\Phi_0 A)^{k+i-1}\Phi_0 Bu_i + \sum_{i=k}^{k+\mu-1}(-\Phi_{-1}E)^{-k+1}\Phi_{-1}Bu_i,\ k \geq 1 \tag{2.61}$$

Ειδικά στην τελευταία σχέση προβάλεται ξεκάθαρα ο μη-αιτιατός χαρακτήρας του συστήματος αφού η αναφορά σε μελλοντικές εισόδους περιέχεται στο άθροισμα του τελευταίου όρου.

Μπορούμε να ορίσουμε σαν (προς τα εμπρός) πίνακα μετάβασης της ημικατάστασης τον πίνακα

$$\Psi_k = \Phi_k = (\Phi_0 A)^k\Phi_0 \tag{2.62}$$

Η αντιστοιχία του παραπάνω πίνακα με τον κλασσικό πίνακα μετάβασης στα συστήματα του χώρου των καταστάσεων είναι προφανής ενόψει των παραπάνω σχέσεων.

Παρόμοιο τύπο λύσης μπρορούμε να επιτύχουμε για την περίπτωση της αναδρομικής σχέσης προς τα πίσω. Στην περίπτωση αυτή δίνεται κάποια τελική τιμή x_N και ζητείται ο υπολογισμός της ακολουθίας $x_{N-1}, x_{N-2}, \ldots$ δεδομένων των αντίστοιχων εισόδων. Δίνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα :

Θεωρημα 2.23 *Η προς τα πίσω λύση της (2.9) υπάρχει εάν-ν η τελική τιμή x_N ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$EV_1 E x_N = \sum_{i=N-p}^{N-1} EV_{N-i+1} B u_i \tag{2.63}$$

οπότε η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$x_k = -V_{k-N+1} E x_N + \sum_{i=k-p}^{N-1} V_{k-i} B u_i, \; k \leq N-1 \tag{2.64}$$

Απόδειξη. Αρχικά διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$EV_{-i+1} - V_{-i} A = I\delta_i$$

και στην συνέχεια βάσει του τύπου (2.64) γράφουμε

$$\begin{aligned}
Ax_k &= -AV_{k-N+1} E x_N + \sum_{i=k-p}^{N-1} AV_{k-i} B u_i \\
&= -(EV_{k-N+2} - I\delta_{k-N+1}) E x_N + \sum_{i=k-p}^{N-1} (EV_{k-i+1} - I\delta_{k-i}) B u_i \qquad (2.65) \\
&= I\delta_{k-N+1} E x_N - EV_{k-N+2} E x_N + \sum_{i=k-p+1}^{N-1} EV_{k-i+1} B u_i - B u_k
\end{aligned}$$

Για $k = N-1$ η παραπάνω σχέση δίνει

$$\begin{aligned}
Ax_{N-1} &= Ex_N - EV_1 E x_N + \sum_{i=N-p}^{N-1} EV_{N-i+1} B u_i - B u_{N-1} \\
Ax_{N-1} + Bu_{N-1} &= Ex_N - EV_1 E x_N + \sum_{i=N-p}^{N-1} EV_{N-i+1} B u_i \\
EV_1 E x_N &= \sum_{i=N-p}^{N-1} EV_{N-i+1} B u_i \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

Οπότε ο τύπος της λύσης ισχύει για $N-1$ εάν-ν η τελική τιμή x_N ικανοποιεί την (2.66). Για $k < N-1$ η (2.65) δίνει

$$\begin{aligned}
Ax_k &= -EV_{k-N+2} E x_N + \sum_{i=k-p+1}^{N-1} EV_{k-i+1} B u_i - B u_k \\
Ax_k + Bu_k &= Ex_{k+1}
\end{aligned}$$

άρα η (2.66) ισχύει για κάθε $k < N$. ■

Αντίστοιχοι τύποι με τις (2.61) και (2.60) μπορούν εύκολα να επιτευχθούν.

Μια τρίτη προσέγγιση στην επίλυση της εξίσωσης (2.9) είναι η λεγόμενη συμμετρική λύση. Στην περίπτωση αυτή δίνονται συνοριακές τιμές x_0 και x_N και ζητούνται οι ενδιάμεσες τιμές. Η αντιμετώπιση του προβλήματος σαν συνοριακό πρόβλημα είναι ακριβώς όμοια με την θεώρηση του προβλήματος στις προηγούμενες παραγράφους του κεφαλαίου.

Θεωρημα 2.24 *Έστω το κανονικό σύστημα (2.9). Τότε οι συνοριακές τιμές x_0, x_N συνδέονται με τη σχέση*

$$\begin{bmatrix} -\Phi_{N-1}A & \Phi_0 E \\ -\Phi_{-1}A & \Phi_{-N}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{N-1}B & \Phi_{N-2}B & \cdots & \Phi_0 B \\ \Phi_{-1}B & \cdots & \Phi_{-N+1}B & \Phi_{-N}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

επιπλέον ο πίνακας $F_{0,N} := \begin{bmatrix} -\Phi_{N-1}A & \Phi_0 E \\ -\Phi_{-1}A & \Phi_{-N}E \end{bmatrix}$ *έχει τάξη n.*

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά την (2.26) με τον $n(N+1) \times nN$ πίνακα

$$A_N^r := \begin{bmatrix} \Phi_{N-1} & \Phi_{N-2} & \cdots & \Phi_1 & \Phi_0 \\ \Phi_{N-2} & \Phi_{N-3} & \cdots & \Phi_0 & \Phi_{-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Phi_0 & & & & \Phi_{-N+1} \\ \Phi_{-1} & \Phi_{-2} & \cdots & \Phi_{-N+1} & \Phi_{-N} \end{bmatrix}$$

και χρησιμοποιόντας τις ιδιότητες του θεμελιώδους πίνακα έχουμε

$$\begin{bmatrix} -\Phi_{N-1}A & \Phi_0 E \\ -\Phi_{N-2}A & \Phi_{-1}E \\ \vdots & \vdots \\ -\Phi_{-1}A & \Phi_{-N}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{N-1} \\ \vdots \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{N-1}B & \Phi_{N-2}B & \cdots & \Phi_1 B & \Phi_0 B \\ \Phi_{N-2}B & \Phi_{N-3}B & \cdots & \Phi_0 B & \Phi_{-1}B \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Phi_0 B & & & & \Phi_{-N+1}B \\ \Phi_{-1}B & \Phi_{-2}B & \cdots & \Phi_{-N+1}B & \Phi_{-N}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

Η σχέση (2.67) αποτελείται από την πρώτη και τελευταία γραμμή της παραπάνω σχέσης. Για να δείξουμε ότι $rank F_{0,N} = n$ πολλαπλασιάζουμε τον $F_{0,N}$ από αριστερά με τον πίνακα

$$V := \begin{bmatrix} \Phi_0 E & -\Phi_{-1} A \\ -\Phi_{-1} A & \Phi_0 E \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι αντιστρέψιμος αφού εύκολα διαπιστώνεται ότι $V^2 = I$.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Phi_0 E & -\Phi_{-1} A \\ -\Phi_{-1} A & \Phi_0 E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi_{N-1} A & \Phi_0 E \\ -\Phi_{-1} A & \Phi_{-N} E \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} -(\Phi_{N-1} + \Phi_{-1}) A & (\Phi_0 + \Phi_{-N}) E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα $rank F_{0,N} \leq n$. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τον τελευταίο πίνακα με $\begin{bmatrix} -(\Phi_{-1} A)^T & (\Phi_0 E)^T \end{bmatrix}^T$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} \Phi_{N-1} A \Phi_{-1} A - \Phi_{-1} A + \Phi_0 E + \Phi_{-N} E \Phi_0 E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

άρα $rank F_{0,N} = n$. ■

Θεωρημα 2.25 *Έστω το σύστημα (2.9), η ακολουθία εισόδων $u_k, k = 0, 1, 2, \ldots N-1$ και οι συμβιβαστές με αυτή συνοριακές τιμές x_0, x_N (δηλ. που ικανοποιούν την σχέση (2.67)). Τότε οι ενδιάμεσες τιμές της x_k δίνονται από τύπο:*

$$x_k = \Phi_k E x_0 - \Phi_{-N+k} E x_N + \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_{k-i-1} B u_i, \; k = 1, 2, \ldots N-1 \tag{2.69}$$

Απόδειξη. Ο παραπάνω τύπος είναι απλά η αναλυτική μορφή των $N-1$ μεσαίων εξισώσεων της (2.68). ■

Προφανώς η μέθοδος του θεμελιώδους πίνακα παρέχει ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την μελέτη των περιγραφικών συστημάτων. Τα δύο τελευταία αποτελέσματα μπορούν άμεσα να συγκριθούν με αυτά των προηγούμενων μεθόδων, ενώ είναι ταυτόχρονα εύκολα εφαρμόσιμα από υπολογιστικής πλευράς.

2.9 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε μερικές από τις σημαντικότερες μεθόδους επίλυσης περιγραφικών εξισώσεων. Η επιλογή των συγκεκριμένων μεθόδων έγινε κυρίως με βάση το γεγονός ότι κατά την γνώμη μας είναι αυτές που προβάλλουν κατά τον καλύτερο τρόπο την εσωτερική αλγεβρική ή γεωμετρική δομή των συστημάτων αυτών, σε σχέση με τις ιδιότητες των αντίστοιχων λύσεων που προκύπτουν. Εξάλλου οι συγκεκριμένες εργάσιες ήταν και η αφορμή για την επέκταση των αποτελεσμάτων αυτών που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια.

Από την συνολική αντιμετώπιση των περιγραφικών συστήματων τόσο στις μεθόδους που παρουσιάστηκαν παραπάνω όσο και γενικότερα στην σχετική βιβλιογραφία διαφαίνεται ότι το καταλληλότερο χρονικό πλαίσιο για την μελέτη τους είναι αυτό του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Αυτό γίνεται άμεσα αντιληπτό τόσο λόγω του μη αιτιατού χαρακτήρα των περιγραφικών εξισώσεων, όσο και από την συμμετρική μορφή των λύσεων που προκύπτουν. Επιπλέον είναι μάλλον αφύσικο να θεωρούμε μη αιτιατά συστήματα σαν αναδρομικές σχέσεις προς μια κατεύθυνση, αφού αυτό συνεπάγεται περιορισμούς στην επιλογή των τιμών της ημικατάστασης στο ένα άκρο του μη φραγμένου διαστήματος.

Για περαιτέρω μελέτη πάνω στο θέμα εκτός των εργασιών που τα σημαντικότερα σημεία τους παρουσιάστηκαν παραπάνω μπορούμε να προτείνουμε τις [9] , [10] , [11] , [17] , [1] , [2] .

2.10 Βιβλιογραφία

[1] Campbell S.L., ”Non regular singular dynamic Leontief Systems”, Econometrica, Vol-47, No 6, November 1977, pp. 1565-1568.

[2] Campbell S.L., Meyer C.D., JR and N.J. Rose, ”Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients”, SIAM J. Appl. Math., Vol 31, No 3, Nov 1976, pp. 411-425.

[3] Gantmacher F.R.,’Matrix Theory’, Chelsea Publishing Company, 1971, New York.

[4] Ionescu V., Oara C., ”Generalized Discrete time Riccati Theory”, Siam Journal on Control and Optimization, Vol-34, No 2, March 1996, pp. 601-619.

[5] Kuijper M., ”First order representations of Linear systems”, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhauser, Boston, 1994.

[6] Leontief W., ”The Dynamic Inverse”, in Contributions to Input-Output Analysis, Vol I, ed. by A.P. Carter and A. Brody, Amsterdam, North-Holland, 1970

[7] Lewis F. L., ”Descriptor Systems: Decomposition into Forward and Backward Subsystems”, IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-29, No 2, February 1984, pp. 167-170.

[8] Lewis F. L., B.G.Mertzios, "On the Analysis of Discrete Linear Time-Invariant Singular Systems", IEEE Trans. Autom. Contr., Vol 35, No 4, April 1990, pp.506 - 511.

[9] Lewis F. L., "A Survey of Linear Singular Systems", Circuits Systems and Signal Processing, Vol 5, No 1, 1986, pp.3 - 36.

[10] Lewis F.L., "A Tutorial on the Geometric Analysis of Linear time-invariant Implicit systems", Automatica, Vol 28, No 1, 1992, pp 119-137.

[11] Lewis F.L.,"Descriptor Systems: Expanded Descriptor Systems and Markov Parameters", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-28, No 5, May 1983, pp. 623-627.

[12] Luenberger D.G., "Dynamic Equations in Descriptor Form", IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-22, No 3, June 1977, pp. 312-321.

[13] Luenberger D.G., Arbel A., "Notes and comments on Singular Dynamic Leontief Systems", Econometrica, Vol-45, No 4, May 1977, pp. 992-995.

[14] Luenberger D.G., "Boundary Recursion for Descriptor Variable Systems", IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-34, No 3, March 1989, pp. 287-292.

[15] Luenberger D. G., 1978, Time-invariant descriptor systems,Automatica, Vol.14, 473-480.

[16] Mertzios B.G. and Lewis F. L., Fundamental matrix of discrete singular systems., Circuit Systems Signal Process, Vol.8, No.3, pp.341-355.

[17] Nikoukhah R, Willsky A., Bernard C. Levy, "Boundary-value descriptor systems: well-posedness, reachability and observability", Int. J. Control, 1987, Vol 46, 1715 - 1737.

[18] Schinnar A.P., "The Leontief Dynamic Generalized Inverse", The Quarterly Journal of Economics, November 1978, pp. 641-651.

[19] K-T. Wong, "The eigenvalue problem $\lambda Tx + Sx$", J. Diff. Equations, vol. 16, 1974, pp. 270-281.

Κεφαλαιο 3

Μη-κανονικά πρωτοβάθμια συστήματα διακριτού χρόνου

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε τον χώρο λύσεων ομογενών, μη-κανονικών συστημάτων διακριτού χρόνου πρώτης τάξης της μορφής

$$Ex_{k+1} = Ax_k$$

όπου E, A είναι σταθεροί πιθανόν μη-τετράγωνοι, πραγματικοί πίνακες. Ο όρος "μη-κανονικό" (non-regular) χρησιμοποιείται σε αυτό το κεφάλαιο για να διακρίνουμε την παραπάνω γενική περίπτωση από την κανονική, δηλαδή την περίπτωση όπου οι πίνακες E, A είναι τετράγωνοι και ικανοποιούν την συνθήκη $\det(\sigma E - A) \neq 0$ σχεδόν[1] για κάθε σ.

Τα μη-κανονικά συστήματα διακριτού χρόνου πρώτης τάξης είναι το φυσικό πλαίσιο για πολλά φυσικά, κοινωνικά και οικονομικά συστήματα. Αναφέρουμε μόνο μερικά από αυτά ενδεικτικά (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [10]). Μη-τετράγωνα συστήματα απαντώνται στα διασυνδεμένα συστήματα όπου δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ εισόδων και εξόδων. Στην οικονομία το μοντέλο του Leontieff είναι γενικά ένα μη-τετράγωνο πεπλεγμένο σύστημα πρώτης τάξης, καθώς η τετράγωνη περίπτωση είναι

[1] Η φράση "για σχεδόν κάθε" ερμηνεύεται ως "για κάθε εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων".

περισσότερο τεχνητή, αφού στην ουσία απαιτεί ο αριθμός των αγαθών που παράγονται να ισούται με τον αριθμό των μονάδων που τα παράγουν. Η μη-κανονική περίπτωση συστήματος πρώτης τάξης παίζει επίσης σημαντικό ρόλο στην μελέτη της διακριτής εξίσωσης του Riccati, όπου εμφανίζεται ο εκτεταμένος πρωτοβάθμιος Χαμιλτονιανός πίνακας (Extended Hamiltonian Pencil EHP) (βλέπε [2] , [5]).

Η κανονική περίπτωση έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (βλέπε για παράδειγμα [11] , [12] , [7] , [8] , [9] , [13] κλπ.) και διάφορες προσεγγίσεις έχουν προταθεί. Σε όλες αυτές τις μελέτες φαίνεται ότι οι αρχικές συνθήκες της περιγραφικής εξίσωσης δεν μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα, αφού είναι δυνατό αυτές να καταστήσουν το σύστημα μη-επιλύσιμο. Επιπλέον έχει δειχθεί ότι ο περιορισμός του χρονικού διαστήματος από το $\mathbb{Z}^+$ σε ένα πεπερασμένο υποσύνολο του και η επιλογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών στα άκρα έχει σαν αποτέλεσμα τον μοναδικό καθορισμό των ενδιάμεσων τιμών της περιγραφικής μεταβλητής, δηλαδή της λύσης. Η μη-αιτιατή φύση των περιγραφικών συστημάτων μπορεί να εκφραστεί είτε μέσω της προς τα εμπρός - προς τα πίσω ανάλυσης του συστήματος (forward-backward decomposistion) [7] , όπου το αρχικό σύστημα αναλύεται σε ένα αιτιατό και σε ένα αντι-αιτιατό μέρος ή μέσω της εξίσωσης απεικόνισης των συνοριακών τιμών (boundary mapping equation) [12] , που παίζει το ρόλο του γενικευμένου πίνακα μετάβασης για την ιδιάζουσα εξίσωση.

Από την σκοπιά της θεωρίας συμπεριφοράς (behavioral approach) τα μη-τετράγωνα περιγραφικά συστήματα έχουν μελετηθεί τόσο στον συνεχή όσο και στο διακριτό χρόνο (βλέπε ενδεικτικά [6] , [14] , [15]), χωρίς όμως να δοθεί έμφαση στον ρόλο της δομής των συστημάτων στο άπειρο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα στην περίπτωση των συστημάτων διακριτού χρόνου, η θεωρία συμεριφοράς να μην λαμβάνει υπόψιν την μη-αιτιατή φύση των ιδιαζόντων συστημάτων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην θεωρία συμπεριφοράς η αιτιότητα της συμπεριφοράς του συστήματος είναι a priori υπόθεση και συνεπώς, το $\mathbb{Z}^+$ σαν πεδίο του χρόνου, είναι το φυσικό πλαίσιο εργασίας. Επιπλέον γίνεται μια θεμελιώδης διάκριση μεταξύ του συστήματος και της μαθηματικής του περιγραφής. Σύμφωνα με την θεωρία συμεριφοράς, το σύστημα (βλέπε [14] , [15]) ορίζεται ως το σύνολο όλων των πιθανών τροχιών που μπορεί να προκύψουν σαν αποτέλεσμα κάποιου φυσικού, μηχανικού, κοινωνικού ή οικονομικού φαινομένου. Κατά αυτή την έννοια η μαθηματική περιγραφή του συστήματος μπορεί να πάρει διάφορες μορφές ανάλογα με τον τρόπο που επιλέγει κανείς να το μοντελοποιήσει.

Η προσέγγιση που ακολουθούμε μοιάζει περισσότερο με αυτές στις [11] , [12] , [7] , [8] , [9] , [13] , παρά με αυτή της θεωρία συμπεριφοράς. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε το σύνολο λύσεων μιας δεδομένης μη-κανονικής περιγραφικής εξίσωσης χωρίς να κάνουμε καμιά εκ των προτέρων υπόθεση για την αιτιότητα της συμπεριφοράς του συστήματος. Η έννοια της συνθηκολογησιμότητας (conditionability) που εμφανίζεται στην [11] , επεκτείνεται κατά φυσικό τρόπο στην μη-τετράγωνη περίπτωση και δείχνεται να παίζει σημαντικό ρόλο στην ταξινόμηση των λύσεων.

3.2 Συνθηκολογησιμότητα και Συμπεριφορά

Θεωρούμε την μη-κανονική περιγραφική εξίσωση

$$Ex_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., N-1 \tag{3.70}$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{p\times m}$ είναι σταθεροί πραγματικοί πίνακες και $x_k \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, 2, ..., N$ είναι το περιγραφικό διάνυσμα. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί σε μια πιο εκτεταμένη μορφή ως

$$\begin{bmatrix} -A & E & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -A & E & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -A & E & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = 0 \tag{3.71}$$

ή ισοδύναμα

$$S_N \bar{x}_N = 0 \tag{3.72}$$

όπου $S_N \in \mathbb{R}^{Np\times(N+1)m}$ είναι ο πίνακας στο αριστερό μέλος της (3.72) και $\bar{x}_N = [x_0^T, x_1^T, ..., x_N^T]^T \in \mathbb{R}^{(N+1)m}$. Στην [11] ο πίνακας S_N ορίζεται σαν πίνακας επιλυσιμότητας (solvability matrix*)*. Στην μη-ομογενή περίπτωση στην [11] όταν εμφανίζονται είσοδοι στο σύστημα, για να είναι το σύστημα επιλύσιμο, ο πίνακας S_N πρέπει να έχει πλήρη τάξη. Παρόλα αυτά στην ομογενή περίπτωση, για να είναι το σύστημα επιλύσιμο δεν χρειάζεται ο πίνακας S_N να έχει πλήρη τάξη, αφού δεν υπάρχουν είσοδοι και η εξίσωση (3.72) είναι πάντα επιλύσιμη (έχει τουλάχιστον την τετριμένη λύση

$x_k = 0$). Ορίζουμε το σύνολο λύσεων (συμπεριφορά) της (3.70)

$$\mathcal{B} = \{x_k : Ex_{k+1} = Ax_k,\ k = 0, 1, 2, ..., N-1\}$$

Η έννοια της συνθηκολογησιμότητας (conditionability) μπορεί να επεκταθεί στην μη-κανονική περίπτωση. Στην [11] ένα επιλύσιμο σύστημα ορίζεται ως συνθηκολογήσιμο αν οποιαδήποτε επιλογή (αποδεκτών) συνοριακών τιμών x_0, x_N, καθορίζει μοναδικά την λύση για όλα τα ενδιάμεσα βήματα της περιγραφική μεταβλητής $x_1, x_2, ..., x_{N-1}$. Στην κανονική, χρονικά αναλλοίωτη περίπτωση τα συστήματα είναι πάντα συνθηκολογήσιμα. Στην περίπτωση μας (3.70) τα συστήματα δεν είναι γενικά συνθηκολογήσιμα, που σημαίνει ότι οι συνοριακές τιμές x_0, x_N δεν επαρκούν για να καθορίσουν μοναδικά τα $x_k \in \mathcal{B}$. Για να γίνει εύκολα αντιληπτο αυτό αρκεί να θεωρήσουμε δύο λύσεις της (3.71) $\bar{x}_N, \bar{y}_N$ που έχουν τις ίδιες συνοριακές τιμές x_0, x_N και πιθανόν διαφορετικές ενδιάμεσες τιμές, δηλ.

$$\bar{x}_N = [x_0^T, x_1^T, ..., x_{N-1}^T, x_N^T]^T$$

$$\bar{y}_N = [x_0^T, y_1^T, ..., y_{N-1}^T, x_N^T]^T$$

Είναι προφανές ότι η διαφορά $\bar{x}_N - \bar{y}_N = [0, x_1^T - y_1^T, ..., x_{N-1}^T - y_{N-1}^T, 0]^T$ θα ικανοποιεί την (3.71). Η εξίσωση (3.71) ανάγεται τώρα στην

$$\begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ -A & E & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -A & E \\ 0 & \cdots & 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} - y_{N-1} \end{bmatrix} = 0$$

Προφανώς $x_k = y_k$, $k = 1, 2, ..., N-1$ εάν και μόνο εάν ο πίνακας στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης έχει πλήρη τάξη στηλών. Αυτός ο πίνακας ορίζεται ως πίνακας συνθηκολογησιμότητας (conditionabilty matrix) στην [11] για την κανονική περίπτωση. Αντίστοιχα ορίζουμε σαν πίνακα συνθηκολογησιμότητας για την ιδιάζουσα περίπτωση τον πίνακα

$$C_N = \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ -A & E & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -A & E \\ 0 & \cdots & 0 & -A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Np\times(N-1)m} \tag{3.73}$$

Είναι γνωστό (βλέπε για παράδειγμα [4]) ότι η αντιστρεψιμότητα του πρωτοβάθμιου πίνακα $\sigma E - A$ συνεπάγεται ότι ο πίνακας C_N έχει πλήρη τάξη στηλών και συνεπώς συνθηκολογησιμότητα του αντίστοιχου συστήματος. Όταν ο πρωτοβάθμιος πίνακας $\sigma E - A$ δεν είναι αντιστρέψιμος είναι πιθανόν το σύστημα να μην είναι συνθηκολογήσιμο. Αυτό συνεπάγεται ότι μη τετριμένες λύσεις υπάρχουν ακόμη και όταν οι συνοριακές τιμές x_0, x_N είναι μηδέν. Οι λύσεις αυτές θα έχουν την μορφή $\bar{x}_N = [0, z_1^T, ..., z_{N-1}^T, 0]^T$, με $[z_1^T, ..., z_{N-1}^T]^T \in \ker C_N$.

Από την άλλη πλευρά όταν μελετάμε μια ομογενή αυτοπαλλίνδρομη παράσταση όπως η (3.70), είναι φυσικό να αναμένουμε οι μη τετριμένες λύσεις να διεγείρονται από μη μηδενικές συνοριακές τιμές x_0, x_N. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό

Ορισμος 3.1 [1] *Δύο λύσεις της (3.70)* $(x_k, y_k) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ *ονομάζονται συνοριακά ισοδύναμες εάν-ν*

$$x_k - y_k \in [0] \tag{3.74}$$

όπου $[0] = \{z_k : z_0 = z_N = 0,\ [z_1^T, ..., z_{N-1}^T]^T \in \ker C_N\}$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η σχέση (3.74) ορίζει μια ισοδυναμία μεταξύ των λύσεων της (3.70). Αυτή η σχέση ισδυναμίας ορίζει ένα διαμερισμό της συμπεριφοράς της (3.70). Είναι φυσικό να θεωρούμε το χώρο λύσεων της (3.70) ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των λύσεων, δηλαδή το σύνολο πηλίκο:

$$\tilde{B} = \mathcal{B}/[0] \tag{3.75}$$

Ο διανυσματικός χώρος $\tilde{B}$ αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας mod $[0]$ της μορφής

$$[x_k] = \{y_k : y_k = x_k + z_k,\ y_k \in \mathcal{B}, z_k \in [0]\} = x_k + [0] \tag{3.76}$$

Η λύση x_k είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $[x_k]$. Προφανώς όταν το σύστημα είναι συνθηκολογήσιμο, η μηδενική κλάση $[0]$ ανάγεται στο στοιχείο $\{0\}$ και $\tilde{B} = \mathcal{B}$.

Για να μελετήσουμε την δομή του $\tilde{B}$ είναι βολικό να ανάγουμε (χωρίς περιορισμό της γενικότητας) τον πρωτοβάθμιο πίνακα $\sigma E - A$, στην κανονική Kronecker μορφή (βλέπε για παράδειγμα [4]). Μια γεωμετρική προσέγγιση, όπου θα χρησιμοποιούσαμε κανονικούς και μη-κανονικούς deflating υποχώρους, είναι επίσης δυνατή αλλά θα αποφευγθεί για λόγους απλότητας.

Είναι γνωστό ότι για κάθε πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $\sigma E - A$, με $E, A \in \mathbb{R}^{p\times m}$, υπάρχουν δύο αντιστρέψιμοι τετράγωνοι πίνακες $U \in \mathbb{R}^{p\times p}, V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε

$$U(\sigma E - A)V = \begin{bmatrix} \sigma I_n - J_{\mathbb{C}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma J_\infty - I_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_\epsilon(\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_\eta(\sigma) \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

όπου ο πίνακας στο δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι η Kronecker κανονική μορφή του αρχικού πρωτοβάθμιου πίνακα. Το πρώτο μπλοκ του διαγώνιου πίνακα αντιστοιχεί στην πεπερασμένες (γενικευμένες) ιδιοτιμές του $\sigma E - A$ και ο πίνακας $J_{\mathbb{C}}$ είναι σε κανονική (πραγματική) Jordan μορφή. Αντίστοιχα το δεύτερο μπλοκ αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές στο άπειρο του αρχικού πίνακα και ο J_∞ είναι (μηδενοδύναμος) πίνακας σε Jordan μορφή με όλα του τα διαγώνια στοιχεία ίσα με μηδεν. Το τρίτο (τέταρτο) μπλοκ $L_\epsilon(\sigma)$ ($L_\eta(\sigma)$) είναι ένας μπλοκ διαγώνιος πίνακας, που αποτελείται από μικρότερα μη τετράγωνα μπλοκ $L_{\epsilon_i}(\sigma)$, $i = 1, 2, ...r$ ($L_{\eta_i}(\sigma)$, $i = 1, 2, ..., l$) της μορφής

$$L_{\epsilon_i}(\sigma) = \sigma M_{\epsilon_i} - N_{\epsilon_i} \qquad (L_{\eta_i}(\sigma) = \sigma M_{\eta_i}^T - N_{\eta_i}^T)$$

με $M_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v\times(v+1)}$ και $N_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v\times(v+1)}$,

όπου $v = \epsilon_i$ ή $v = \eta_i$. Το μπλοκ $L_{\epsilon_i}(\sigma)$ $(L_{\eta_i}(\sigma))$ είναι το δεξιό (αριστερό) Kronecker μπλοκ και οι ακέραιοι ϵ_i (η_i) είναι οι δεξιοί (αριστεροί) Kronecker δείκτες του $\sigma E - A$. Επιπλέον, έστω

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{r} \epsilon_i \qquad (\eta = \sum_{i=1}^{l} \eta_i) \tag{3.78}$$

και

$$p = n + \mu + \epsilon + \eta + l \tag{3.79}$$

$$m = n + \mu + \epsilon + \eta + r \tag{3.80}$$

Το επόμενο λήμμα θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στην συνέχεια

Λημμα 3.2 [1] *Έστω ο γενικευμένος επιλύων πίνακας (βλέπε* [3] *) του* $\sigma E - A$

$$S_k = \begin{bmatrix} -A & E & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -A & E & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -A & E & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -A & E \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{kp\times(k+1)m} \tag{3.81}$$

Τότε $rankS_k = kp - \sum_{\{i:k>\eta_i\}} (k-\eta_i)$ *όπου* η_i, $i = 1, 2, ..., l$ *είναι οι αριστεροί Kronecker δείκτες του* $\sigma E - A$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 1 στην [3] [1] για τον πρωτοβάθμιο πίνακα $\sigma E - A$. ■

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο

Θεωρημα 3.3 [1] *Για οποιοδήποτε αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, συγκεκριμένα για* $N > N_{\min}$, *τα επόμενα ισχύουν*

$$\dim \mathcal{B} = Nr + m - \eta \tag{3.82}$$

$$\dim[0] = (N-1)r - \epsilon \tag{3.83}$$

όπου $N_{\min=} \max_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,l}} \{\epsilon_i + 1, \eta_i\}$.

Απόδειξη. Εν όψει της (3.71) είναι προφανές ότι ο $\mathcal{B}$ είναι ισόμορφος του $\ker S_N$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα

$$rankS_N = Np - \sum_{\{j:N>\eta_j\}} (N-\eta_j) \tag{3.84}$$

Για $N > N_{\min}$ έχουμε

$$\begin{aligned} rankS_N &= Np - \sum_{j=1,..,l} (N-\eta_j) \\ &= Np - Nl + \eta \end{aligned} \tag{3.85}$$

Άρα

$$\dim \ker S_N = (N+1)m - rankS_N = Nm + m - Np + Nl - \eta = \tag{3.86}$$

[1] Για την ακρίβεια η εξίσωση (2.4) στην [3] έχει ένα τυπογραφικό λάθος. Από την απόδειξη του θεωρήματος 1 είναι προφανές ότι ο σωστός τύπος είναι $rankS_k = (r+q)k - \sum_{\{i:v_i<k\}} (k-v_i)$.

$$\begin{aligned} &= N(m-p)+m+Nl-\eta = N(r-l)+m+Nl-\eta = \\ &= Nr+m-\eta \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\dim \mathcal{B} = Nr+m-\eta$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι ο $[0]$ είναι ισόμορφος με το $\ker C_N$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα

$$C_N^T = \begin{bmatrix} E^T & -A^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & E^T & A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)m\times Np} \tag{3.87}$$

παίρνουμε

$$rankC_N = rankC_N^T = (N-1)m - \sum_{\{i:N>\epsilon_i\}} (N-1-\epsilon_i) \tag{3.88}$$

όπου οι δεξιοί δείκτες του $\sigma E^T - A^T$ είναι απλά οι αριστεροί δείκτες του $\sigma E - A$. Άρα για $N > N_{\min}$ παίρνουμε

$$rankC_N = Nm - m - (N-1)r + \epsilon \tag{3.89}$$

και

$$\begin{aligned} \dim\ker C_N &= (N-1)m - rankC_N = \\ &= Nm - m - Nm + m + (N-1)r - \epsilon = \\ &= Nr - r - \epsilon \end{aligned} \tag{3.90}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\dim[0] = Nr - r - \epsilon$. ■

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι $N > N_{\min}$ και συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Luenberger [12] για να προσδιορίσουμε μια γενικευμένη εξίσωση απεικόνισης συνοριακών συνθηκών για την (3.70). Η εξίσωση απεικόνισης συνοριακών συνθηκών στα κανονικά περιγραφικά συστήματα, είναι μια γενίκευση του πίνακα μετάβασης στα συστήματα στο χώρο των καταστάσεων. Συγκεκριμένα η εξίσωση απεικόνισης συνοριακών συνθηκών δίνει την σχέση μεταξύ των συνοριακών τιμών x_0 και x_N. Επιπλέον η εξίσωση απεικόνισης συνοριακών συνθηκών εκφράζει τους περιορισμούς που θέτει το σύστημα στην επιλογή των συνοριακών συνθηκών για το χρονικό σύνολο $k = 0, 1, 2, ..., N$.

Εφαρμόζουμε συμπίεση γραμμών στον πίνακα S_N στην (3.71) έτσι ώστε να διατηρήσουμε μόνο τις γραμμικά ανεξάρτητα γραμμές του S_N. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί πολλαπλασιάζονταςτην (3.71) από τα αριστερά με κατάλληλο (αντιστρέψιμο) πίνακα $F_1 \in \mathbb{R}^{pN \times pN}$ όπως παρακάτω

$$F_1 S_N \bar{x}_N = 0 \tag{3.91}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 & C'_N & X_N \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_N = 0 \tag{3.92}$$

όπου $X_0, X_N \in \mathbb{R}^{(Np-Nl+\eta)\times m}$, $C'_N \in \mathbb{R}^{(Np-Nl+\eta \times m(N-1)}$ (υπενθυμίζουμε ότι $Np - Nl + \eta = rankS_N$, άρα ο πίνακας $[X_0, C'_N, X_N]$ έχει πλήρη τάξη γραμμών) και τα μηδενικά συμβολίζουν μηδενικούς πίνακες με κατάλληλες διαστάσεις. Μπορούμε τώρα να απορίψουμε τις μηδενικές γραμμές του πίνακα στην (3.92), αφού δεν παίζουν κανένα ρόλο στο σύστημα μας. Άρα η (3.92) ανάγεται στην

$$\begin{bmatrix} X_0 & C'_N & X_N \end{bmatrix} \bar{x}_N = 0 \tag{3.93}$$

Ο πίνακας C'_N παίζει το ρόλο του πίνακα συνθηκολογησιμότητας και προφανώς $rankC'_N = rankC_N$. Αν εφαρμόσουμε συμπίεση γραμμών στον πίνακα C'_N (πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τον C'_N με ένα κατάλληλο αντιστρέψιμο πίνακα F_2) παίρνουμε

$$F_2 C'_N = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $W \in \mathbb{R}^{(Nm-m-(N-1)r+\epsilon)\times(N-1)m}$ είναι ένας πίνακας με πλήρη τάξη γραμμών. Εφαρμόζοντας αυτή την συμπίεση στην (3.93) παίρνουμε

$$F_2 \begin{bmatrix} X_0 & C'_N & X_N \end{bmatrix} \bar{x}_N = 0$$

$$\begin{bmatrix} \times & & & & \times \\ \vdots & & W & & \vdots \\ \times & & & & \times \\ Z_0 & 0 & \cdots & 0 & Z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = 0 \tag{3.94}$$

όπου ο αριθμός γραμμών των Z_0, Z_N θα είναι $(N\,p - Nl + \eta) - (N\,m - m - (N-1)r + \epsilon) = n + \mu + 2\eta$. Επιπλέον ο πίνακας $[Z_0, Z_N]$ θα έχει πλήρη τάξη γραμμών αφού ο πίνακας στο αριστερό μέλος της (3.94) έχει επίσης πλήρη τάξη γραμμών. Οι τελευταίες μπλοκ γραμμές στην (3.94) δίνουν το παρακάτω αποτέλεσμα

Θεωρημα 3.4 [1] *Για κάθε (πιθανόν) μη-κανονικό σύστημα στην περιγραφική μορφή (3.70) υπάρχει μια γενικευμένη εξίσωση απεικόνισης συνοριακών της μορφής*

$$[Z_0, Z_N] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_N \end{bmatrix} = 0 \tag{3.95}$$

με $[Z_0, Z_N] \in \mathbb{R}^{(n+\mu+2\eta)\times 2m}$ *και* $rank\,[Z_0, Z_N] = n + \mu + 2\eta$, *που εκφράζει τους περιορισμούς που θέτει το σύστημα στις συνοριακές τιμές του συστήματος* x_0, x_N.

Το παραπάνω θεώρημα δίνει ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα. Προφανώς το διάνυσμα $[x_0^T, x_N^T]^T$ μπορεί να επιλεχθεί από το χώρο $\ker[Z_0, Z_N]$, του οποίου η διάσταση είναι

$$\dim\ker\,[Z_0, Z_N] = 2m - (n + \mu + 2\eta) = n + \mu + 2(\epsilon + r) \tag{3.96}$$

Άρα υπάρχουν ακριβώς $n+\mu+2(\epsilon+r)$ βαθμοί ελευθερίας στην επιλογή των x_0, x_N. Είναι φυσικό να περιμένουμε ότι αυτή θα είναι επίσης και η διάσταση $\tilde{B}$, αφού τα στοιχεία του είναι κλάσεις ισοδυναμίας λύσεων με ίδιες συνοριακές συνθήκες. Αυτό θα γίνει φανερό στην επόμενη παράγραφο.

3.3 Ταξινόμηση των λύσεων

Ο αρχικός πίνακας $\sigma E - A$ στην εξίσωση (3.70) μπορεί χωρίς περιορισμό της γενικότητας να θεωρηθεί στην κανονική μορφή του Kronecker, αφού η εξίσωση (3.70) μπορεί να μετασχηματιστεί στην κανονική της μορφή, πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με U και εφαρμόζοντας ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων της περιγραφικής μεταβλητής σύμφωνα με

$$x_k = V\hat{x}_k \tag{3.97}$$

Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι ο $\sigma E - A$ είναι ήδη στην κανονική της μορφή και καμιά διάκριση δεν θα γίνεται μεταξύ των $\hat{x}_k$ και x_k. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $N > N_{\min}$. Με αυτές τις προυποθέσεις είναι φανερό ότι το σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα υποσυστήματα που αντιστοιχούν στα πεπερασμένα, τα άπειρα, τα δεξιά και αριστερά Kronecker μπλοκ. Σημειώνουμε ότι θα διατηρήσουμε τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου για τους διανυσματικούς χώρους του κάθε υποσυστήματος. Για να αποφύγουμε πιθανή σύγχυση στο συμβολισμό θα χρησιμοποιούμε τους δείκτες $\mathbb{C}, \infty, \epsilon_i, \eta_j$ για τους αντίστοιχους υποχώρους. Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να διαχωρίσουμε το σύστημα στα επιμέρους υποσυστήματα. Θέτουμε

$$x_k = \left[(x_k^{\mathbb{C}})^T, (x_k^{\infty})^T, (x_k^{\epsilon_1})^T, \ldots (x_k^{\epsilon_r})^T, (x_k^{\eta_1})^T, \ldots, (x_k^{\eta_l})^T\right]^T$$

Το σύστημα (3.70) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί

$$x_{k+1}^{\mathbb{C}} = J_{\mathbb{C}} x_k^{\mathbb{C}} \tag{3.98}$$

$$J_{\infty} x_{k+1}^{\infty} = x_k^{\infty} \tag{3.99}$$

$$M_{\epsilon_i} x_{k+1}^{\epsilon_i} = N_{\epsilon_i} x_k^{\epsilon_i} \tag{3.100}$$

$$M_{\eta_j}^T x_{k+1}^{\eta_j} = N_{\eta_j}^T x_k^{\eta_j} \tag{3.101}$$

για $i = 1, 2, ..., r$, $j = 1, 2, ..., l$. Οι πρώτες δύο εξισώσεις (3.98), (3.99) δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού τα δύο αυτά υποσυστήματα αντιστοιχούν σε μία μέγιστη προς τα εμπρός F/B ανάλυση ενός κανονικού συστήματος, πού έχει ήδη μελετηθεί στην [7] . Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών μπορούν εύκολα να επιτευψθούν σε σχέση με αυθαίρετα επιλεγμένες αρχικές και τελικές τιμές $x_0^{\mathbb{C}}, x_N^{\infty}$ αντίστοιχα

$$x_k^{\mathbb{C}} = J_{\mathbb{C}}^k x_0^{\mathbb{C}}$$

$$x_k^{\infty} = J_{\infty}^{N-k} x_N^{\infty}$$

Κατ' αναλογία ορίζουμε την συμπεριφορά των δύο υποσυστημάτων

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{x_k^{\mathbb{C}} : x_k^{\mathbb{C}} = J_{\mathbb{C}}^k x_0^{\mathbb{C}}\}$$

$$\mathcal{B}_{\infty} = \{x_k^{\infty} : x_k^{\infty} = J_{\infty}^{N-k} x_N^{\infty}\}$$

Επιπλέον $\dim \mathcal{B}_{\mathbb{C}} = n$ και $\dim \mathcal{B}_{\infty} = \mu$ αφού οι στήλες των αντίστοιχων πινάκων $J_{\mathbb{C}}^k, J_{\infty}^{N-k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σαν ακολουθίες. Προφανώς τα δύο αυτά υποσυστήματα είναι συνθηκολογήσιμα (είναι κανονικά περιγραφικά συστήματα), άρα

$$[0]_{\mathbb{C}} = \{0\}, \;\; \tilde{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$$

$$[0]_{\mathcal{B}_{\infty}} = \{0\}, \;\; \tilde{B}_{\infty} = \mathcal{B}_{\infty}$$

Εξετάζουμε τώρα την ομάδα των εξισώσεων (3.100). Για τις (3.100) ορίζουμε αντίστοιχα τους χώρους $\mathcal{B}_{\epsilon_i}$ και $[0]_{\epsilon_i}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.3 και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι πίνακες $\sigma M_{\epsilon_i} + N_{\epsilon_i}$ έχουν μόνο τους δεξιούς δείκτες ϵ_i, έχουμε

$$\dim \mathcal{B}_{\epsilon_i} = N + \epsilon_i + 1 \tag{3.102}$$

$$\dim[0]_{\epsilon_i} = N - \epsilon_i - 1 \tag{3.103}$$

Είναι προφανές ότι $[0]_{\epsilon_i} \subseteq \mathcal{B}_{\epsilon_i}$. Για να προσδιορίσουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\tilde{B}_{\epsilon_i} = \mathcal{B}_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i}$ της (3.100) πρέπει να εντοπίσουμε έναν αντιπρόσωπο για κάθε μη-μηδενική κλάση ισοδυναμίας. Αυτό είναι σχετικά εύκολο αν θεωρήσουμε το επόμενο

Λημμα 3.5 [1] *Αν $J_{\epsilon_i} \in \mathbb{R}^{(\epsilon_i+1)\times(\epsilon_i+1)}$ είναι ένα Jordan μπλοκ με όλα του τα διαγώνια στοιχεία ίσα με μηδέν τότε*

$$M_{\epsilon_i} J_{\epsilon_i} = N_{\epsilon_i} \quad \textit{και} \quad N_{\epsilon_i} J_{\epsilon_i}^T = M_{\epsilon_i} \tag{3.104}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απευθείας υπολογισμός των παραπάνω γινομένων λαμβάνοντας υπόψιν την ειδική μορφή των πινάκων $M_{\epsilon_i}, N_{\epsilon_i}, J_{\epsilon_i}$. ■

Εν όψει της (3.104) μπορεί να επιβεβαιώσουμε ότι

$$M_{\epsilon_i} J_{\epsilon_i}^{k+1} = N_{\epsilon_i} J_{\epsilon_i}^{k} \quad \text{και} \quad N_{\epsilon_i} (J_{\epsilon_i}^T)^{k+1} = M_{\epsilon_i} (J_{\epsilon_i}^T)^{k}$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, ..., N-1$, που σημαίνει ότι οι στήλες των $J_{\epsilon_i}^k$, $(J_{\epsilon_i}^T)^{N-k}$ ικανοποιούν τις (3.100). Επιπλέον οι στήλες αυτών των πινάκων είναι γραμμικά ανεξάρτητες ακολουθίες. Αυτό μας οδηγεί να δώσουμε τον επόμενο ορσμό

Ορισμος 3.6 [1]

$$\mathcal{B}_{\epsilon_i}^f = \{x_k^{\epsilon_i} : x_k^{\epsilon_i} = J_{\epsilon_i}^k x_0^{\epsilon_i}\} \tag{3.105}$$

$$\mathcal{B}_{\epsilon_i}^b = \{x_k^{\epsilon_i} : x_k^{\epsilon_i} = (J_{\epsilon_i}^T)^{N-k} x_N^{\epsilon_i}\} \tag{3.106}$$

Οι δείκτες f, b στις παραπάνω εξισώσεις προέρχονται από τα αρχικά των λέξεων Forward και *Backward* αντίστοιχα. Ο υποχώρος $\mathcal{B}_{\epsilon_i}^f$ περιέχει λύσεις προερχόμενες από την προς τα εμπρός διάδοση των αρχικών συνθηκών $x_0^{\epsilon_i}$, ενώ $\mathcal{B}_{\epsilon_i}^b$ περιέχει λύσεις κινούμενες προς τα πίσω αντίστοιχα.

Λημμα 3.7 [1]

$$\dim \mathcal{B}_{\epsilon_i}^f = \epsilon_i + 1 \tag{3.107}$$

$$\dim \mathcal{B}_{\epsilon_i}^b = \epsilon_i + 1 \tag{3.108}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής λαμβάνοντας υπόψιν οτι οι στήλες των J^k, $(J^T)^{N-k}$, για $k = 0, 1, 2, ..., N$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις των (3.100). Οι διαστάσεις των $\mathcal{B}^f_{\epsilon_i}, \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}$ είναι ίσες με τον αριθμό στηλών των J^k, $(J^T)^{N-k}$, που είναι $\epsilon_i + 1$. ■

Θεωρημα 3.8 [1]

$$\mathcal{B}_{\epsilon_i} = \mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} \oplus [0]_{\epsilon_i} \tag{3.109}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε αρχικά μια λύση $x^{\epsilon_i}_k$ έτσι ώστε $x^{\epsilon_i}_k \in \mathcal{B}^f_{\epsilon_i}$ και $x^{\epsilon_i}_k \in \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}$. Τότε

$$x^{\epsilon_i}_k = J^k_{\epsilon_i} x^{\epsilon_i}_0 = (J^T_{\epsilon_i})^{N-k} x^{\epsilon_i}_N \tag{3.110}$$

Αν λάβουμε υπόψιν ότι $J^k_{\epsilon_i} = (J^T_{\epsilon_i})^k = 0$ για κάθε $k \geq \epsilon_i + 1$ και την υπόθεση $N > N_{\min} \geq \epsilon_i$, από την (3.110) παίρνουμε

$$x^{\epsilon_i}_N = J^N_{\epsilon_i} x^{\epsilon_i}_0 = 0 \text{ και } x^{\epsilon_i}_0 = (J^T_{\epsilon_i})^N x^{\epsilon_i}_N = 0$$

Άρα $x^{\epsilon_i}_k = 0$, για κάθε $k = 0, 1, 2, ..., N$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \cap \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} = \{0\}$$

και μπορούμε να ορίσουμε

$$\mathcal{B}^{f/b}_{\epsilon_i} = \mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} = \{x^{\epsilon_i}_k : x^{\epsilon_i}_k = J^k_{\epsilon_i} x^{\epsilon_i}_0 + (J^T_{\epsilon_i})^{N-k} x^{\epsilon_i}_N\} \tag{3.111}$$

Τώρα είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\mathcal{B}^{f/b}_{\epsilon_i} \cap [0]_{\epsilon_i} = \{0\}$. Πράγματι αν $x^{\epsilon_i}_k \in \mathcal{B}^{f/b}_{\epsilon_i}$ και $x^{\epsilon_i}_k \in [0]_{\epsilon_i}$, τότε $x^{\epsilon_i}_0 = x^{\epsilon_i}_N = 0$ και από την (3.111), $x^{\epsilon_i}_k = 0$, για $k = 0, 1, 2, ..., N$. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το ευθύ άθροισμα $\mathcal{B}^{f/b}_{\epsilon_i} \oplus [0]_{\epsilon_i} = \mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} \oplus [0]_{\epsilon_i}$. Λαμβάνοντας υπόψιν τις διαστάσεις αυτών των υποχώρων έχουμε

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} \oplus [0]_{\epsilon_i}) &= \dim \mathcal{B}^f_{\epsilon_i} + \dim \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} + \dim[0]_{\epsilon_i} = \\ &= \epsilon_i + 1 + \epsilon_i + 1 + N - \epsilon_i - 1 = \\ &= N + \epsilon_i + 1 \end{aligned}$$

που συμπίπτει με το $\dim \mathcal{B}_{\epsilon_i} = N + \epsilon_i + 1$. Άρα $\mathcal{B}_{\epsilon_i} = \mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} \oplus [0]_{\epsilon_i}$. ■

Εισάγουμε τώρα τον διανυσματικό χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathrm{mod}\ [0]_{\epsilon_i}$ που αντιστοιχεί στην (3.100)

$$\tilde{B}_{\epsilon_i} = \mathcal{B}_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} \tag{3.112}$$

Θεωρημα 3.9 [1]

$$\tilde{B}_{\epsilon_i} = (\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i})/[0]_{\epsilon_i} = \mathcal{B}^f_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} \tag{3.113}$$

$$\dim \tilde{B}_{\epsilon_i} = 2(\epsilon_i + 1) \tag{3.114}$$

Απόδειξη. Προφανώς $\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} \subseteq \mathcal{B}_{\epsilon_i}$ που συνεπάγεται $(\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i})/[0]_{\epsilon_i} \subseteq \mathcal{B}_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} = \tilde{B}_{\epsilon_i}$. Έστω τώρα $[x^{\epsilon_i}_k] \in \tilde{B}_{\epsilon_i}$. Από την (3.109) μπορούμε μοναδικά να γράψουμε $x^{\epsilon_i}_k = y^{\epsilon_i}_k + \hat{y}^{\epsilon_i}_k + z^{\epsilon_i}_k$ με $y^{\epsilon_i}_k \in \mathcal{B}^f_{\epsilon_i}, \hat{y}^{\epsilon_i}_k \in \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}$ και $z^{\epsilon_i}_k \in [0]_{\epsilon_i}$. Προφανώς $[x^{\epsilon_i}_k] = y^{\epsilon_i}_k + \hat{y}^{\epsilon_i}_k + [0]_{\epsilon_i}$ που συνεπάγεται $[x^{\epsilon_i}_k] \in (\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i})/[0]_{\epsilon_i}$. Άρα $\tilde{B}_{\epsilon_i} \subseteq (\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i})/[0]_{\epsilon_i}$. Αποδείξαμε ότι $\tilde{B}_{\epsilon_i} = (\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i})/[0]_{\epsilon_i}$.

Για το δεύτερο μέρος της (3.113) έχουμε $\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \subseteq \mathcal{B}_{\epsilon_i}$ και $\mathcal{B}^b_{\epsilon_i} \subseteq \mathcal{B}_{\epsilon_i}$ και προφανώς $\mathcal{B}^f_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} + \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} \subseteq \mathcal{B}_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i}$. Αντίστροφα αν $[x^{\epsilon_i}_k] \in \tilde{B}_{\epsilon_i}$ τότε σύμφωνα με την παραπάνω μοναδική ανάλυση του $x^{\epsilon_i}_k$ έχουμε $[x^{\epsilon_i}_k] = y^{\epsilon_i}_k + \hat{y}^{\epsilon_i}_k + [0]_{\epsilon_i}$ ή $[x^{\epsilon_i}_k] = (y^{\epsilon_i}_k + [0]_{\epsilon_i}) + (\hat{y}^{\epsilon_i}_k + [0]_{\epsilon_i}) \in \mathcal{B}^f_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} + \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i}$. Άρα $\mathcal{B}_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} \subseteq \mathcal{B}^f_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} + \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{B}_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} = \mathcal{B}^f_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} + \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i}$. Επιπλέον είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\mathcal{B}^f_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} \cap \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} = [0]_{\epsilon_i}$. Με βάση αυτό μπορούμε να γράψουμε $\tilde{B}_{\epsilon_i} = \mathcal{B}^f_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}/[0]_{\epsilon_i}$.

Για να αποδείξουμε την (3.114) είναι αρκετό να παρατηρήσουμε ότι η απεικόνιση $(\mathcal{B}^f_{\epsilon_i} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}) \ni x^{\epsilon_i}_k \mapsto [x^{\epsilon_i}_k] \in \tilde{B}_{\epsilon_i}$ είναι ισομορφισμός, άρα $\dim \tilde{B}_{\epsilon_i} = \dim \mathcal{B}^f_{\epsilon_i} + \dim \mathcal{B}^b_{\epsilon_i} = 2(\epsilon_i + 1)$. ■

Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα αυτά στην (3.100) για όλα τα $i = 1, 2, ..., r$ ορίζουμε

$$\tilde{B}_{\epsilon} = \mathcal{B}_{\epsilon}/[0]_{\epsilon} \tag{3.115}$$

όπου $\mathcal{B}_{\epsilon} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{B}_{\epsilon_i}$ και $[0]_{\epsilon} = \bigoplus_{i=1}^{r} [0]_{\epsilon_i}$ (τα ευθέα αθροίσματα είναι καλά ορισμένα εξαιτίας της μπλοκ διαγώνιας δομής της Kronecker μορφής). Το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να επεκταθεί αν ορίσουμε τους χώρους $\mathcal{B}^f_{\epsilon} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{B}^f_{\epsilon_i}$ και $\mathcal{B}^b_{\epsilon} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{B}^b_{\epsilon_i}$. Έχουμε

$$\tilde{B}_{\epsilon} = (\mathcal{B}^f_{\epsilon} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon})/[0]_{\epsilon} \tag{3.116}$$

$$\dim \tilde{B}_{\epsilon} = \dim(\mathcal{B}^f_{\epsilon} \oplus \mathcal{B}^b_{\epsilon}) = 2\sum_{i=1}^{r}(\epsilon_i + 1) = 2(\epsilon + r) \tag{3.117}$$

Εξετάζουμε τώρα την τέταρτη ομάδα εξισώσεων (3.101). Εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.3 και το γεγονός ότι ο πίνακας $\sigma M_{\eta_j}^T - N_{\eta_j}^T$ έχει μόνο τον αριστερό δείκτη η_j παίρνουμε $\dim \mathcal{B}_{\eta_j} = 0 + \eta_j - \eta_j = 0$ και $\dim[0]_{\eta_j} = 0 - 0 - 0 = 0$.

Άρα $\mathcal{B}_{\eta_j} = \{0\}$, που σημαίνει ότι αυτό το μέρος του συστήματος έχει μόνο την τετριμένη λύση $x_k^{\eta_i} = 0, k = 0, 1, 2, ..., N$. Επεκτείνοντας το αποτέλεσμα για όλα τα $j = 1, 2, 3, ..., l$ έχουμε $\mathcal{B}_\eta = \bigoplus_{j=1}^{l} \mathcal{B}_{\eta_j} = \{0\}$

Έχοντας ολοκληρώσει την μελέτη των συμπεριφορών των επιμέρους συστημάτων επιστρέφουμε στο συνολικό χώρο $\tilde{B}$ που ορίζεται στην (3.75) σαν χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας mod $[0] = [0]_{\mathbb{C}} \oplus [0]_\infty \oplus [0]_\epsilon \oplus [0]_\eta = [0]_\epsilon$. Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί το επόμενο αποτέλεσμα

Θεωρημα 3.10 [1]

$$\tilde{B} = (\mathcal{B}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{B}_\infty \oplus \mathcal{B}_\epsilon^f \oplus \mathcal{B}_\epsilon^b)/[0] \tag{3.118}$$

$$\dim \tilde{B} = \dim(\mathcal{B}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{B}_\infty \oplus \mathcal{B}_\epsilon^f \oplus \mathcal{B}_\epsilon^b) = n + \mu + 2(\epsilon + r) \tag{3.119}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο η διάσταση του $\tilde{B}$ συμπίπτει με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας στην επιλογή των συνοριακών τιμών x_0, x_N στην (3.95).

Παραδειγμα 3.11 [1]

Έστω η παρακάτω περιγραφική εξίσωση όπου ο πίνακας είναι ήδη στην Kronecker κανονική μορφή

$$\begin{bmatrix} \sigma-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^{\mathbb{C}} \\ x_k^\infty \\ x_k^\epsilon \\ x_k^\eta \end{bmatrix} = 0 \tag{3.120}$$

όπου $k = 0, 1, 2, ..., N-1$ και $N > N_{\min} = \max\{2, 1\} = 2$

$$\sigma I - J_{\mathbb{C}} = [\sigma - 2], \quad \sigma J_\infty - I = \begin{bmatrix} -1 & \sigma \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_\epsilon(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \end{bmatrix}, \quad L_\eta(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η περιγραφική μεταβλητή στην (3.120) αναλύεται με βάση την διαγώνια Kronecker μορφή. Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{x_k^{\mathbb{C}} : x_k^{\mathbb{C}} = J_{\mathbb{C}}^k x_0^{\mathbb{C}} = 2^k x_0^{\mathbb{C}}\}$$

$$\mathcal{B}_{\infty} = \{x_k^{\infty} : x_k^{\infty} = J_{\infty}^{N-k} x_N^{\infty} = \begin{bmatrix} \delta_{N-k} & \delta_{N-k-1} \\ 0 & \delta_{N-k} \end{bmatrix} x_N^{\infty}\}$$

$$\mathcal{B}_{\epsilon}^f = \{x_k^{\epsilon} : x_k^{\epsilon} = J_{\epsilon}^k x_0^{\epsilon} = \begin{bmatrix} \delta_k & \delta_{k-1} & \delta_{k-2} \\ 0 & \delta_k & \delta_{k-1} \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix} x_0^{\epsilon}\}$$

$$\mathcal{B}_{\epsilon}^b = \{x_k^{\epsilon} : x_k^{\epsilon} = (J_{\epsilon}^T)^{N-k} x_N^{\epsilon} = \begin{bmatrix} \delta_{N-k} & \delta_{N-k-1} & \delta_{N-k-2} \\ 0 & \delta_{N-k} & \delta_{N-k-1} \\ 0 & 0 & \delta_{N-k} \end{bmatrix} x_N^{\epsilon}\}$$

όπου $\delta_0 = 1$ και $\delta_k = 0$ για κάθε $k \neq 0$ είναι το γνωστό δέλτα του Kronecker.

3.4 Συμπεράσματα

Η έλλειψη συνθηκολογησιμότητας, εξαιτίας της παρουσίας δεξιών δεικτών του Kronecker στον πίνακα $\sigma E - A$, παίζει πρωτεύοντα ρόλο στην ταξινόμηση των λύσεων της μη-κανονικής εξίσωσης $Ex_{k+1} = Ax_k$. Το σύνολο λύσεων που οφείλεται σε μηδενικές συνοριακές συνθήκες $x_0 = x_N = 0$ ορίζεται σαν μηδενική κλάση ισοδυναμίας $[0]$ και το σύνολο λύσεων $\mathcal{B}$ διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας που έχουν σαν στοιχεία λύσεις με τις ίδιες συνοριακές τιμές x_0, x_N. Δείχθηκε ότι η πηγή της μη συνθηκολογησιμότητας και κατ' επέκταση η ύπαρξη μη τετριμένης μηδενικής κλάσης $[0]$, είναι οι δεξιοί δείκτες του Kronecker.

Η πεπερασμένη και άπειρη δομή ιδιοτιμών του πρωτοβάθμιου πίνακα δίνει αντίστοιχα λύσεις κινούμενες προς τα εμπρός και προς τα πίσω, ενώ οι δεξιοί δείκτες δίνουν και τα δύο είδη λύσεων. Από την άλλη πλευρά οι αριστεροί δείκτες δίνουν μόνο την τετριμένη μηδενική λύση, περιορίζοντας κατά αυτό τον τρόπο την επιλογή των συνοριακών τιμών της συνολικής εξίσωσης.

3.5 Βιβλιογραφία

[1] E.Antoniou, N. Karampetakis, A.I. Vardulakis, ”A classification of the solutions of

non-regular discrete-time descriptor systems", proceedings of the IEEE - Conference on Decision and Control (CDC 97), December 1997, San Diego, USA.

[2] Bender D.J., Laub A.J., "The Linear-quadratic Optimal regulator for Descriptor Systems: Discrete time case", Automatica, Vol 23, 1987, No 1, pp 71-85.

[3] Bitmead R., Kung S, Anderson B., Kailath T., "Greatest common divisors via generalized Sylvester and Bezout matrices", IEEE Trans. Autom. Control, Vol AC-23, No 6, December 1978, pp. 1043-1047.

[4] Gantmacher F.R.,"Matrix Theory", Chelsea Publishing Company, 1971, New York.

[5] Ionescu V., Oara C., "Generalized Discrete-time Riccati theory", SIAM J. Control and Optimization, Vol 34, No 2, March 1996, pp 601-619.

[6] Kuijper M., "First order representations of Linear systems", Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhauser, Boston, 1994.

[7] Lewis F. L., "Descriptor Systems: Decomposition into Forward and Backward Subsystems", IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-29, No 2, February 1984, pp. 167-170.

[8] Lewis F. L., B.G.Mertzios, "On the Analysis of Discrete Linear Time-Invariant Singular Systems", IEEE Trans. Autom. Contr., Vol 35, No 4, April 1990, pp.506 - 511.

[9] Lewis F. L., "A Survey of Linear Singular Systems", Circuits Systems and Signal Processing, Vol 5, No 1, 1986, pp.3 - 36.

[10] Lewis F.L., "A Tutorial on the Geometric Analysis of Linear time-invariant Implicit systems", Automatica, Vol 28, No 1, 1992, pp 119-137.

[11] Luenberger D.G.,"Dynamic Equations in Descriptor Form", IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-22, No 3, June 1977, pp. 312-321.

[12] Luenberger D.G., "Boundary Recursion for Descriptor Variable Systems", IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-34, No 3, March 1989, pp. 287-292.

[13] Nikoukhah R, Willsky A., Bernard C. Levy, "Boundary-value descriptor systems: well-posedness, reachability and observability", Int. J. Control, 1987, Vol 46, 1715 - 1737.

[14] Willems J.C., 'Paradigms and Puzzles in the Theory of Dynamical Systems', IEEE Trans. Autom. Contr., Vol 36, No 3, March 1991, pp. 259-294.

[15] Willems J.C., ”From time series to Linear system - Part I. Finite dimensional Linear time invariant systems”, Automatica, Vol 22, No 5, 1986, pp 561-580.

Κεφαλαιο 4

Αυτοπαλλίνδρομες παραστάσεις διακριτού χρόνου

4.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από την αυτοπαλλίνδρομη εξίσωση

$$A_q\xi_{k+q} + A_{q-1}\xi_{k+q-1} + ... + A_0\xi_k = 0 \tag{4.121}$$

όπου $k = 0, 1, 2, ...N - q$, ή ισοδύναμα

$$A(\sigma)\xi_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ..., N - q \tag{4.122}$$

όπου ο πίνακας $A(\sigma) = A_q\sigma^q + A_{q-1}\sigma^{q-1} + ... + A_0 \in \mathbb{R}^{r\times r}[\sigma]$ είναι ένας κανονικός πολυωνυμικός πίνακας, δηλ. $\det A(\sigma) \neq 0$ για σχεδόν[1] κάθε σ, $\xi_k \in \mathbb{R}^r, k = 0, 1, 2, ..., N$ είναι μία ακολουθία διανυσμάτων και σ συμβολίζει τον τελεστή $\sigma\xi_k = \xi_{k+1}$. Σημειώνουμε ότι ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά του συστήματος (4.122) πάνω από το πεπερασμένο σύνολο $k = 0, 1, 2, ..., N$ και όχι πάνω από το $\mathbb{Z}^+$. Επιπλέον χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι πίνακες A_0 και A_q δεν είναι μηδενικοί αφού η περίπτωση αυτή μπορεί να αποφευγθεί με μια απλή επαναρίθμηση των δεικτών των A_i. Ο πίνακας A_q δεν είναι γενικά αντιστρέψιμος. Γι' αυτό το λόγο η εξίσωση (4.121) δεν μπορεί να επιλυθεί αναδρομικά προς τα εμπρός, δηλαδή δεδομένων των $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{q-1}$, να

[1] Η φράση "για σχεδόν κάθε" ερμηνεύεται ως "για κάθε εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων".

υπολογιστούν τα $\xi_q, \xi_{q+1}, \ldots$. Αυτός είναι ο κύριος λόγος για τον οποίο αντιμετωπίζουμε το παραπάνω πρόβλημα σαν συνοριακό πρόβλημα δύο σημείων (Two point boundary value problem). Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου είναι συγκρίσιμα με αυτά που παρουσιάζονται στις [10] , [11] , [7] , [8] , [9] , [12] και αποτελούν άμεση γενικευσή τους.

Χρησιμοποιώντας παρόμοιο συμβολισμό με την [14] ορίζουμε την συμπεριφορά του συστήματος που περιγράφεται απο την εξίσωση (4.122) ως

$$\mathcal{B} = \{\xi_k \,/\, \xi_k \in \mathbb{R}^r, \xi_k \text{ ικανοποιεί την (4.122)}\} \tag{4.123}$$

όπου $k = 0, 1, 2, \ldots N$.

4.2 Συμβολισμοί - Μαθηματικό υπόβαθρο

Το μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται γι' αυτό το κεφάλαιο προέρχεται από τις [3] , [4] , [5] , [6] και [13] . Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^{m\times n}[\sigma]$το σύνολο των $m \times n$ πολυωνυμικών πινάκων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ και μεταβλητή το σ. Ένας τετράγωνος πολυωνυμικός πίνακας της μορφής $A(\sigma) = A_q\sigma^q + A_{q-1}\sigma^{q-1} + \ldots + A_0\mathbb{R}^{r\times r}[\sigma]$ λέγεται κανονικός αν και μόνο αν $\det A(\sigma) \neq 0$ για σχεδόν κάθε σ. Οι πεπερασμένες ιδιοτιμές του $A(\sigma)$ ορίζονται ως οι ρίζες της εισωσης $\det A(\sigma) = 0$. Έστω

$$S^{\lambda_i}_{A(\sigma)} = diag\{(\sigma - \lambda_i)^{m_{i1}}, \ldots, (\sigma - \lambda)^{m_{ir}}\}$$

η τοπική Smith μορφή του $A(\sigma)$ στο $\sigma = \lambda_i$ και έστω λ_i μια ιδιοτιμή του $A(\sigma)$, όπου $0 \leq m_{i1} \leq m_{i2} \leq \ldots \leq m_{ir}$. Οι όροι $(\sigma - \lambda_i)^{m_{ij}}$ ονομάζονται πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του $A(\sigma)$ στο $\sigma = \lambda_i$, m_{ij} $j = 1, 2, \ldots, r$ είναι οι μερικές πολλαπλότητες της ιδιοτιμής λ_i και $m_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij}$ είναι η πολλαπλότητα της λ_i.

Ο δυϊκός πίνακας του $A(\sigma)$ ορίζεται ως ο πίνακας $\tilde{A}(\sigma) = \sigma^q A(\sigma^{-1}) = A_0\sigma^q + A_1\sigma^{q-1} + \ldots + A_q$. Οι άπειροι στοιχειώδεις διαιρέτες του $A(\sigma)$ είναι οι πεπερασμένοι διαιρέτες του $\tilde{A}(\sigma)$ στο $\sigma = 0$. Ο συνολικός αριθμός στοιχειωδών διαιρετών (πεπερασμένοι και άπειροι) του $A(\sigma)$ισούται με το γινόμενο $r \times q$, όπου r είναι η διάσταση και q είναι ο βαθμός του $A(\sigma)$.

Ένα ζεύγος πινάκων $X_i \in \mathbb{R}^{r\times m_i}$, $J_i \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}$, όπου ο J_i είναι στην Jordan κανονική μορφή που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή λ_i πολλαπλότητας m_i, ονομάζεται πεπερασμένο φασματικό ζεύγος (Finite Spectral Pair) του $A(\sigma)$που αντιστοιχεί στην λ_i αν και μόνο αν

$$\sum_{k=0}^{q} A_k X J_i^k = 0 \quad \text{και} \quad rank \begin{bmatrix} X_i \\ X_i J_i \\ \vdots \\ X_i J_i^{m_i - 1} \end{bmatrix} = m_i \tag{4.124}$$

Ο πίνακας J_i αποτελείται από Jordan blocks μεγέθους ίσο με τις μερικές πολλαπλότητες της λ_i.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ όλες οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του $A(\sigma)$ και (X_i, J_i)τα αντίστοιχα φασματικά τους ζεύγη. Ο συνολικός αριθμός πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετων του $A(\sigma)$ισούται με τον βαθμό της ορίζουσας του , δηλ. $n = \deg(\det A(\sigma)) = \sum_{i=1}^{p} m_i$. Το ζεύγος πινάκων

$$X_F = [X_1, X_2, ..., X_p] \in \mathbb{R}^{r \times n} \tag{4.125}$$

$$J_F = diag\{J_1, J_2, ..., J_p\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{4.126}$$

ονομάζεται πεπερασμένο ιδιοζεύγος (Finite Eigenpair) του $A(\sigma)$ και ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$\sum_{k=0}^{q} A_k X_F J_F^k = 0, \quad rank \begin{bmatrix} X_F \\ X_F J_F \\ \vdots \\ X_F J_F^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{4.127}$$

Ένα πεπερασμένο φασματικό ζεύγος του $\tilde{A}(\sigma)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\tilde{\lambda} = 0$ ορίζεται ως το άπειρο ιδιοζεύγος του $A(\sigma)$, και ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$\sum_{k=0}^{q} A_k X_\infty J_\infty^{q-k} = 0, \quad rank \begin{bmatrix} X_\infty \\ X_\infty J_\infty \\ \vdots \\ X_\infty J_\infty^{\mu-1} \end{bmatrix} = \mu \tag{4.128}$$

όπου $X_\infty \in \mathbb{R}^{r \times \mu}$, $J_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$.

4.3 Προσδιορισμός μιας βάσης του $\mathcal{B}$

Θεωρούμε την αυτοπαλλίνδρομη παράσταση (4.122) και το πεπερασμένο φασματικό ζεύγος (X_F, J_F) του $A(\sigma)$. Στην αντίστοιχη περίπτωση συνεχούς χρόνου, δηλ. όταν $\sigma = \frac{d}{dt}$ είναι ο διαφορικός τελεστής αντί για τον μοναδιαίο τελεστή μετάθεσης προς τα εμπρός, το πεπερασμένο φασματικό ζεύγος του $A(\sigma)$ δίνει γραμμικά ανεξάρτητες συνεχείς λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν και στην περίπτωσή μας. Δίνουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεωρημα 4.1 [2] *Οι στήλες του πίνακα*

$$\Psi(k) = X_F J_F^k \in \mathbb{R}^{r\times n} \tag{4.129}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.122), για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Απόδειξη. Έστω (X_F, J_F) ένα πεπερασμένο φασματικό ζεύγος του $A(\sigma)$. Από τον ορισμό του πεπερασμένου φασματικόυ ζεύγους έχουμε

$$\begin{aligned} A(\sigma)X_F J_F^k &= \sum_{i=0}^{q} A_i X_F J_F^{k+i} = \\ &= (\sum_{i=0}^{q} A_i X_F J_F^i) J_F^k \overset{(4.127)}{=} 0 \end{aligned}$$

για $k = 0, 1, 2, ..., N - q$ και από την δεύτερη σχέση της (4.127) είναι προφανές ότι οι στήλες του πίνακα $X_F J_F^k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.122) για κάθε $k = 0, 1, 2, ..., N \geq n$. ■

Το αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος δεν αρκεί για να προσδιορίσουμε πλήρως την συμπεριφορά της (4.122).

Ορισμος 4.2 [2] *Το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση*

$$\tilde{A}(\sigma)\xi_k = 0 \tag{4.130}$$

όπου $\tilde{A}(\sigma) := A_0\sigma^q + A_1\sigma^{q-1} + \ldots + A_q$, *ορίζεται ώς το* ***'δυϊκό'*** *του (4.122).*

Σημειώνουμε ότι εξαιτίας της υπόθεσης μας ότι ο πίνακας A_0 δεν είναι μηδεν, ο δυϊκός πίνακας $\tilde{A}(\sigma)$ θα έχει επίσης βαθμό q. Δίνουμε τώρα ένα ενδιαφένον λήμμα:

Λημμα 4.3 [2] *Αν* ξ_k *είναι μια λύση της (4.122) στο σύνολο* $k = 0, 1, 2, ..., N$, *τότε η ακολουθία* $\tilde{x}_k = \xi_{N-k}$ *είναι λύση της (4.130).*

Απόδειξη. Έστω ξ_k μια λύση της (4.122). Τότε χρησιμοποιώντας την (4.122)

$$\tilde{A}(\sigma)\tilde{x}_k = A_0\tilde{x}_{k+q} + A_1\tilde{x}_{k+q-1} + ... + A_q\tilde{x}_k$$

$$= A_0\xi_{N-k-q} + A_1\xi_{N-k-q+1} + ... + A_q\xi_{N-k} = 0$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, ..., N - q$. ■

Όπως είναι φανερό από την δυϊκότητα των δύο εξισώσεων, το αποτέλεσμα του παραπάνω λήμματος μπορεί να εφαρμοστεί και αντίστροφα, δηλαδή αν $\tilde{x}_k$ είναι μια λύση της (4.130) τότε η ακολουθία $\xi_k := \tilde{x}_{N-k}$ είναι λύση της (4.122). Αυτή η απλή παρατήρηση ορίζει μια ένα - προς - ένα απεικόνιση μεταξύ των λύσεων της (4.122) και της δυϊκής της (4.130). Είναι προφανές ότι οι δύο εξισώσεις έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων, με μόνη διαφορά ότι οι λύσεις της αρχικής είναι χρονικά ανεστραμένες σε σχέση με τις λύσεις της δυϊκής της. Μπορούμε να πούμε ότι οι δύο εξισώσεις ουσιαστικά ταυτίζονται, απλά είναι γραμμένες με αντίστροφη χρονική φορά η μία ως προς την άλλη ,δηλ. αν $\xi_0, \xi_1, ...\xi_{N-1}, \xi_N$ είναι μια ακολουθία που ικανοποιεί την (4.122), τότε η χρονικά ανεστραμένη ακολουθία $\xi_N, \xi_{N-1}, ..., \xi_1, \xi_0$ ικανοποιεί την (4.130).

Το παραπάνω λήμμα αποδεικνύει ότι οι στήλες του πίνακα $X_F J_F^k$ δεν επαρκούν για το σχηματισμού μιας πλήρους βάσης του $\mathcal{B}$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχουν λύσεις της δυϊκής εξίσωσης (4.130) και άρα και της αρχικής εξίσωσης (4.122), που δεν μπορούν να παραχθούν από κάποιο γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα $X_F J_F^k$. Αυτές δεν είναι άλλες από τις λύσεις που αντισοιχούν σε ιδιοτιμές του πίνακα $\tilde{A}(\sigma)$ στο $\sigma = 0$. Είναι γνωστό (βλ. π.χ. [4]) ότι αν $\lambda_0 \neq 0$ είναι μια ιδιοτιμή του $\tilde{A}(\sigma)$, τότε το λ_0^{-1} είναι πεπερασμένη ιδιοτιμή του $A(\sigma)$. Κατά αυτό τον τρόπο οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του $\tilde{A}(\sigma)$ αντιστοιχούν σε πεπερασμένα φασματικά ζεύγη του $A(\sigma)$ που αντοιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0^{-1}, τα οποία περιέχονται στο (4.129). Στην περίπτωση που ο πίνακας $\tilde{A}(\sigma)$ έχει ιδιοτιμές στο $\sigma = 0$ το πεπερασμένο ιδιοζεύγος που αντιστοιχεί στην μηδενική ιδιοτιμή, είναι το άπειρο φασματικό ζεύγος του $A(\sigma)$ το οποίο προφανώς δεν έχει ληφθεί υπόψην στην (4.129). Για να σχηματίσουμε μια πλήρη βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{B}$ πρέπει να συμπεριλάβουμε σ'αυτή τόσο την πεπερασμένη όσο και την άπειρη φασματική δομή του πίνακα $A(\sigma)$.

Έστω η εξίσωση (4.122) ή η ισοδύναμη λεπτομερέστερη μορφή της (4.121). Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$R_{N+1}(A)\bar{x}_{N+1} = 0 \tag{4.131}$$

όπου $R_{N+1}(A)$ είναι η επιλύουσα του $A(\sigma)$ που έχει $N+1$ block στήλες

$$R_{N+1}(A) = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_q & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_q \end{bmatrix} \tag{4.132}$$

όπου $R_{N+1}(A) \in \mathbb{R}^{r(N-q+1)\times r(N+1)}$ και $\bar{x}_{N+1} = [\ \xi_0^T \ \ \xi_1^T \ \cdots \ \cdots \ \xi_{N-1}^T \ \ \xi_N^T\ ]^T \in \mathbb{R}^{r(N+1)}$. Προφανώς οι εξισώσεις (4.122) και (4.121) είναι ισοδύναμες της (4.131) πάνω από το συγκεκριμένο σύνολο $k = 0, 1, 2, ..., N$.

Με αυτή την απλή παρατήρηση και χρησιμοποιώντας στοιχεία από την θεωρία των επιλυουσών πινάκων διατυπώνουμε το επόμενο θεώρημα:

Θεωρημα 4.4 [2] *Η συμπεριφορά του συστήματος που περιγράφεται από την (4.122) πάνω από το πεπερασμένο σύνολο $k = 0, 1, 2, ..., N$ δίνεται*

$$\mathcal{B} = \{\xi_k : \xi_k = [X_F J_F^k, X_\infty J_\infty^{N-k}] \begin{bmatrix} \zeta_F \\ \zeta_\infty \end{bmatrix}, \zeta_F \in \mathbb{R}^n, \zeta_\infty \in \mathbb{R}^\mu\} \tag{4.133}$$

και

$$\dim \mathcal{B} = rq$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την εξίσωση (4.131). Προφανώς ο χώρος λύσεων αυτής της εξίσωσης είναι ο πυρήνας του $R_{N+1}(A)$. Η συμπεριφορά της (4.122) είναι προφανώς ισόμορφη με τον χώρο λύσεων της (4.131), δηλ.

$$\mathcal{B} \simeq Ker R_{N+1}(A) \tag{4.134}$$

Από το θεώρημα 1.1 [6] σαν ειδική περίπτωση έχουμε

$$Ker R_{N+1}(A) = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} X_F \\ X_F J_F \\ \vdots \\ X_F J_F^N \end{bmatrix} \oplus \operatorname{Im} \begin{bmatrix} X_\infty J_\infty^N \\ X_\infty J_\infty^{N-1} \\ \vdots \\ X_\infty \end{bmatrix} \tag{4.135}$$

Οι διαστάσεις των πινάκων $X_F, J_F, X_\infty, J_\infty$ είναι αντίστοιχα $r\times n$, $n\times n$, $r\times\mu$ και $\mu\times\mu$ όπου $n = \deg|A(\sigma)|$είναι ο συνολικός αριθμός πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών, μ είναι ο συνολικός αριθμός στοιχειωδών διαιρετών στο ∞ (όπου οι πολλαπλότητες των διαιρετών λαμβάνονται υπόψιν και στις δύο περιπτώσεις) και επιπλέον ισχύει $n+\mu = rq$ (βλέπε [4]). Επιπλέον είναι γνωστό [4] ότι οι στήλες του πίνακα $col(X_F J_F^i, X_\infty J_\infty^{N-i})_{i=0}^N$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επιπλέον από την υπόθεση ότι ο πίνακας $A(\sigma)$ είναι κανονικός έχουμε

$$rank R_{N+1}(A) = (N - q + 1)r$$

(αυτό είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα, βλέπε π.χ. [13] άσκηση 4.10). Άρα

$$\dim Ker R_{N+1}(A) = rq \tag{4.136}$$

Προφανώς οι σχέσεις (4.134), (4.135) και (4.136) αποδεικνύουν ότι οι στήλες του πίνακα

$$[X_F, X_\infty] diag\{J_F^k, J_\infty^{N-k}\}$$

είναι πράγματι μια βάση του χώρου $\mathcal{B}$ και συνεπώς $\dim \mathcal{B} = rq$. ■

Είναι φανερό ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{B}$ μπορεί να αναλυθεί σε ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων, εκ των οποίων ο πρώτος αντιστοιχεί στην πεπερασμένη φασματική δόμη του $A(\sigma)$και ο δεύτερος στην φασματική δομή του πίνακα στο άπειρο, δηλ.

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_B$$

όπου $\mathcal{B}_F = \operatorname{Im} col(X_F J_F^i)_{i=0}^N$ και $\mathcal{B}_B = \operatorname{Im} col(X_\infty J_\infty^{N-i})_{i=0}^N$ (οι δείκτες F, B είναι τα αρχικά των λέξεων Forward και Backward αντίστοιχα). Ο πρώτος υποχώρος $\mathcal{B}_F$ περιέχει λύσεις που κινούνται προς τα εμπρός στον χρόνο (αυτό δικαιολογεί τον χαρακτηρσμό του χώρου ως Forward) και αντανακλά την διάδοση των αρχικών συνθηκών $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{q-1}$ προς τα εμπρός, ενώ ο δεύτερος υποχώρος $\mathcal{B}_B$ δίνει λύσεις που κινούνται αντίστροφα, δηλαδή από τον τελική χρονική στιγμή N προς το 0.

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να συγκριθεί με τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στις [10] , [11] , [7] . Σημειώνουμε ότι η συγκεκριμένη ανάλυση του χώρου $\mathcal{B}$ δεν είναι μοναδική και αντιστοιχεί απλά σε μια *μέγιστη προς τα εμπρός ανάλυση* (Maximal Forward Decomposition) του γενικευμένου χώρου καταστάσεων ενός συστήματος πρώτης τάξης στην [7] .

4.4 Λύση της Αυτοπαλλίνδρομης εξίσωσης

Ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός μιας κλειστής φόρμουλας λύσης της (4.122) δεδομένων των συνοριακών τιμών του προβλήματος. Ο λόγος που χρειαζόμαστε συνοριακές συνθήκες και όχι απλά αρχικές συνθήκες είναι προφανής αν λάβουμε υπόψιν την ανάλυση του χώρου λύσεων στην προηγούμενη παράγραφο.

Θεωρημα 4.5 [2]
Δεδομένου του διανύσματος των αρχικών τιμών $x_0 = [\xi_0^T, \xi_1^T, ..., \xi_{q-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{rq}$ *και του διανύσματος των τελικών τιμών* $x_{N-q+1} = [\xi_{N-q+1}^T, \xi_{N-q+2}^T, ..., \xi_N^T]^T \in \mathbb{R}^{rq}$*, η εξίσωση (4.122) έχει μοναδική λύση που δίνεται*

$$\xi_k = [X_F J_F^k M_F \quad X_\infty J_\infty^{N-k} M_\infty] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{N-q+1} \end{bmatrix} \tag{4.137}$$

για $k = 0, 1, 2, ..., N$*, αν και μόνο αν τα διανύσματα* $\hat{\xi}_I$ *και* $\hat{\xi}_F$ *ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη*

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_{N-q+1} \end{bmatrix} \in \ker \begin{bmatrix} J_F^{N-q+1} M_F & -M_F \\ -M_\infty & J_\infty^{N-q+1} M_\infty \end{bmatrix} \tag{4.138}$$

όπου οι πίνακες $M_F \in \mathbb{R}^{n \times rq}$, $M_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times rq}$ *δίνονται από την σχέση*

$$\begin{bmatrix} M_F \\ M_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_F & X_\infty J_\infty^{q-1} \\ X_F J_F & X_\infty J_\infty^{q-2} \\ \vdots & \vdots \\ X_F J_F^{q-1} & X_\infty \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{rq \times rq} \tag{4.139}$$

Κάθε λύση $\xi_k, k = 0, 1, 2, ...N$ της (4.122) θα είναι γραμμικός των διανυσμάτων της βάσης του $\mathcal{B}$, δηλαδή θα υπάρχει διάνυσμα $\zeta \in \mathbb{R}^{rq}$ τέτοιο ώστε

$$\xi_k = \begin{bmatrix} X_F & X_\infty \end{bmatrix} diag\{J_F^k, J_\infty^{N-k}\}\zeta \tag{4.140}$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, ..., N$. Σκοπός μας είναι ο προσδιορισμός του ζ σε σχέσης με τα δεδομένα διανύσματα αρχικών-τελικών τιμών. Από την (4.140) και για $k = 0, 1, 2, ...q-1$ θα έχουμε

$$\hat{\xi}_I = col(X_F J^i, X_\infty J_\infty^{N-i})_{i=0}^{q-1}\zeta$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{\xi}_I = Q \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & J_\infty^{N-q+1} \end{bmatrix} \zeta \tag{4.141}$$

όπου ο πίνακας $Q = \begin{bmatrix} X_F & X_\infty J_\infty^{q-1} \\ X_F J_F & X_\infty J_\infty^{q-2} \\ \vdots & \vdots \\ X_F J_F^{q-1} & X_\infty \end{bmatrix}$ στην παραπάνω σχέση είναι αντιστρέψιμος (βλέπε decomposable pairs στην [4]). Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να διαχωρίσουμε το διάνυσμα $\zeta = [\ \zeta_F^T \quad \zeta_\infty^T\ ]^T$, όπου ζ_F και ζ_∞ έχουν κατάλληλα επιλεγμένες διαστάσεις. Τώρα από την σχέση (4.141) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό των M_F, M_∞ από την

(4.139) έχουμε:

$$\begin{aligned} \zeta_F &= M_F x_0 \\ J_\infty^{N-q+1}\zeta_\infty &= M_\infty x_0 \end{aligned} \tag{4.142}$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση (4.142) προδιορίζει το ζ_F αλλά όχι το ζ_∞. Χρησιμοποιώντας παρόμοια μεθοδολογία μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \zeta_\infty &= M_\infty x_{N-q+1} \\ J_F^{N-q+1}\zeta_F &= M_F x_{N-q+1} \end{aligned} \tag{4.143}$$

Αντίστοιχα η σχέση (4.143) προσδιορίζει το ζ_∞ αλλά όχι το ζ_F. Τώρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.142) και (4.143) έχουμε

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_F \\ \zeta_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_F & 0 \\ 0 & M_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{N-q+1} \end{bmatrix}$$

από την οποία αν λάβουμε υπόψιν την (4.140) παίρνουμε την σχέση (4.137). Επιπλέον συνδυάζοντας τις (4.142) και (4.143) παίρνουμε την συνθήκη συμβατότητας των συνοριακών συνθηκών

$$\begin{bmatrix} J_F^{N-q+1}M_F & -M_F \\ -M_\infty & J_\infty^{N-q+1}M_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{N-q+1} \end{bmatrix} = 0$$

η οποία δεν είναι άλλη από την (4.138). ■

Η εξίσωση (4.138) παίζει το ρόλο της εξίσωσης *απεικόνισης των συνοριακών συνθηκών* (boundary mapping equation) στην [11] και μπορεί να θεωρηθεί άμεση γενίκευση της. Η εξίσωση απεικόνισης των συνοριακών συνθηκών περιέχει όλους τους περιορισμούς που θέτει το σύστημα στα δύο ακραία σημεία του συνόλου $k = 0, 1, 2, ..., N$. Αν οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται, τότε χρησιμοποιώντας την (4.137), μπορούμε να προσδιορίσουμε μοναδικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές του ξ_k.

Για απλούστευση του συμβολισμού και ακολουθόντας παρόμοιο συμβολισμό με την [11] , θέτουμε

$$Z(0,N) = \begin{bmatrix} J_F^{N-q+1}M_F & -M_F \\ -M_\infty & J_\infty^{N-q+1}M_\infty \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rq\times 2rq}$$

και αποδεικνύουμε το επόμενο:

Θεωρημα 4.6 [2] $rank\, Z(0,N) = rq$

Απόδειξη. θέτουμε

$$Q = \begin{bmatrix} X_F & X_\infty J_\infty^{q-1} \\ X_F J_F & X_\infty J_\infty^{q-2} \\ \vdots & \vdots \\ X_F J_F^{q-1} & X_\infty \end{bmatrix}$$

τότε από την (4.139) έχουμε

$$\begin{bmatrix} M_F \\ M_\infty \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_\mu \end{bmatrix} \tag{4.144}$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά τον $Z(0,N)$ με $diag\{Q,Q\}$ ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος, από την (4.144) έχουμε

$$Z(0,N) \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_F^{N-q+1} & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & -I_\mu & 0 & J_\infty^{N-q+1} \end{bmatrix}$$

Προφανώς ο πίνακας στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης έχει πλήρη τάξη γραμμών. Άρα

$$rankZ(0,N) = rq \tag{4.145}$$

■

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να συγκριθεί με το θεώρημα 1 στην [11] , όπου αποδεικνύεται ότι ένας πίνακας απεικόνισης των συνοριακών συνθηκών με πλήρη τάξη υπάρχει αν και μόνο αν το αντίστοιχο σύστημα γενικευμένου χώρου καταστάσεων είναι *επιλύσιμο* (Solvable) και *συνθηκολογήσιμο* (Conditionable). Στην περίπτωση μας το σύστημα είναι σίγουρα επιλύσιμο αφού έχουμε ήδη προσδιορίσει μια λύση και συνθηκολογήσιμο αφού αποδείξαμε ότι στην περίπτωση που οι συνοριακές τιμές ικανοποιούν την (4.138) η λύση αυτή είναι μοναδική. Επιπλέον η επιλυσιμότητα και η συνθηκολογησιμότητα της (4.122) μπορεί να επιβεβαιωθεί χρησιμοποιώντας ελέγχους τάξης των αντίστοιχων πινάκων όπως στην [10] . Στην περίπτωση μας το γεγονός ότι ο πίνακας $A(\sigma)$ είναι κανονικός εξασφαλίζει την ισχύ και των δύο παραπάνω ιδιοτήτων. Είναι επίσης σημαντικό να σημειώσουμε ότι η σχέση (4.145) συνεπάγεται

$$\dim\ker Z(0,N) = rq = \dim\mathcal{B}$$

που σημαίνει ότι τα διανύσματα συμβιβαστών αρχικών-τελικών συνθηκών επιλέγονται από ένα διανυσματικό χώρο διάστασεως rq. Άρα rq είναι ο συνολικός αριθμός συνοριακών τιμών που κατανέμονται στα δύο άκρα του συνόλου $k = 0, 1, 2, ..., N$ και μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα. Η σχέση μεταξύ των $\dim\ker Z(0,N)$ και $\dim\mathcal{B}$ είναι προφανής.

Παραδειγμα 4.7 *Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα*

$$A(\sigma)=\begin{bmatrix}1 & \sigma^2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Προφανώς ο πίνακας $A(\sigma)$ δεν έχει πεπερασένους στοιχειώδεις διαιρέτες αφού εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $\det A(\sigma)=1$. Θεωρούμε τώρα το σύστημα που περιγράφεται από την αυτοπαλλίνδρομη εξίσωση

$$A(\sigma)\xi_k=0$$

για $k=0,1,2,...N-q$ με $N>4$. Σύμφωνα με τον συμβολισμό που έχουμε ακολουθήσει παραπάνω $q=2$ και $r=2$. Άρα πρέπει να αναμένουμε $\mathcal{B}$ με

$$\dim\mathcal{B}=rq=4$$

Πράγματι ο πίνακας $A(\sigma)$ έχει το παρακάτω άπειρο φασματικό ζεύγος

$$X_\infty=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix},\quad J_\infty=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

και σύμφωνα με το θεώρημα 3, μια βάση για τον χώρο $\mathcal{B}=\mathcal{B}_B$ σχηματίζεται από τις στήλες του πίνακα

$$\Psi(k)=X_\infty J_\infty^{N-k}$$

Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις του J_∞ για $k=0,1,2,\ldots,N$ αφού ο J_∞ είναι μηδενοδύναμος. Πράγματι

$$J_\infty^N=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ldots,J_\infty^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},J_\infty^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$J_\infty^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},J_\infty^1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},J_\infty^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ή χρησιμοποιώντας πιο συμπαγή συμβολισμό

$$J_{\infty}^{p} = \begin{bmatrix} \delta_p & \delta_{p-1} & \delta_{p-2} & \delta_{p-3} \\ 0 & \delta_p & \delta_{p-1} & \delta_{p-2} \\ 0 & 0 & \delta_p & \delta_{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_p \end{bmatrix}, p = 0, 1, 2, \ldots, N$$

όπου $\delta_i = 0$ για $i \neq 0$ και $\delta_0 = 1$. Οπότε

$$\Psi(k) = \begin{bmatrix} \delta_{N-k} & \delta_{N-k-1} & \delta_{N-k-2} & \delta_{N-k-3} \\ 0 & 0 & -\delta_{N-k} & -\delta_{N-k-1} \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση απεικόνισης των συνοριακών συνθηκών θα είναι

$$Z(0, N) = [-M_{\infty}, J_{\infty}^{N-q+1} M_{\infty}]$$

αφού δεν υπάρχουν πεπερεσμένα φασματικά ζεύγη. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα

$$M_{\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και αν λάβουμε υπόψιν ότι για $N > 4$, έχουμε $J_{\infty}^{N-q+1} = 0$, παίρνουμε

$$Z(0, N) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ο οποίος προφανώς έχει πλήρη τάξη γραμμών. Από την εξίσωση (4.138) εύκολα φαίνεται ότι οι τελικές συνθήκες μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα, ενώ για $N > 4$ οι αρχικές συνθήκες πρέπει να είναι μηδεν. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού το άπειρο φασματικό ζεύγος του $A(\sigma)$ δίνει λύσεις πεπερασμένης χρονικής διάρκειας (deadbeat modes) που κινούνται προς τα πίσω. Η κλειστή φόρμουλα που δίνει τις ενδιάμεσες τιμές για το ξ_k δίνεται από την (4.137) και είναι

$$\begin{aligned} \xi_k &= X_{\infty} J_{\infty}^{N-k} M_{\infty} x_{N-q+1} = \\ &= \begin{bmatrix} \delta_{N-k-1} & -\delta_{N-k-3} & \delta_{N-k} & -\delta_{N-k-2} \\ 0 & \delta_{N-k-1} & 0 & \delta_{N-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{N-1} \\ \xi_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Πιο αναλυτικά αν θέσουμε $\xi_k = \begin{bmatrix} \xi_k^1 \\ \xi_k^2 \end{bmatrix}, \xi_k^i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ η λύση δεδομένων των ξ_{N-1}, ξ_N είναι

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \xi_{N-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_{N-3} = \begin{bmatrix} -\xi_{N-1}^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \xi_{N-2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\xi_N^2 \end{bmatrix}, \xi_{N-1} = \begin{bmatrix} \xi_{N-1}^1 \\ \xi_{N-1}^2 \end{bmatrix}, \xi_N = \begin{bmatrix} \xi_N^1 \\ \xi_N^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι οι αρχικές συνθήκες δεν εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση. ■

4.5 Ισοδύναμη περιγραφή στον Γενικευμένο Χώρο Καταστάσεων

Σε αυτή την παράγραφο ασχολούμαστε με τον εντοπισμό μιας ισοδύναμης περιγραφής της εξίσωσης (4.122) στο γενικευμένο χώρο τον καταστάσεων. Το θέμα της ισοδυναμίας γραμμικών συστήματων έχει εξεταστεί από πολλούς συγγραφείς στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου. Ο ορισμός της ισοδυναμίας στην περίπτωση μας είναι ανάλογος αυτού της *θεμελιώδους ισοδυναμίας* συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Έστω η αυτοπαλλίνδρομη παρασταση

$$A(\sigma)\xi_k = 0, k = 0, 1, 2, ...N - q + 1 \tag{4.146}$$

με $A(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times r}[\sigma]$. Έστω επίσης μια πρωτοβάθμια αυτοπαλλίνδρομη παρασταση

$$Ex_{k+1} = Ax_k, k = 0, 1, 2, ...N - q + 1 \tag{4.147}$$

με $E, A \in \mathbb{R}^{rq\times rq}$.

Ορισμος 4.8 *Οι πρωτοβάθμια αυτοπαλλίνδρομη παράσταση (4.147) θα ονομάζεται ισοδύναμη της (4.146) πάνω από το πεπερασμένο σύνολο $k = 0, 1, ..., N - q + 1$ ανν υπάρχει ένας πολυωνυμικός γραμμικός ισομορφισμός της μορφής $N(\sigma) = N_p\sigma^p + \ldots + N_1\sigma + N_0 \in \mathbb{R}^{r\times rq}[\sigma]$ μεταξύ των χώρων λύσεων*

$$N(\sigma) : \mathcal{B}_{A_1(\sigma)} \ni \xi_k \to x_k = N(\sigma)\xi_k \in \mathcal{B}_{\sigma E-A} \tag{4.148}$$

Με τον όρο *ισοδύναμη περιγραφή στον γενικευμένο χώρο καταστάσεων ή ισοδύναμη περιγραφική μορφή* εννοούμε ένα μοντέλο που έχει ισόμορφο χώρο λύσεων με το αρχικό σύστημα. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε είναι καθαρά κατασκευαστική και βασίζεται στην ανάλυση της συμπεριφοράς της (4.122) που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες παραγράφους.

Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από την (4.122) και ορίζουμε το παρακάτω διάνυσμα

$$x_k = \begin{bmatrix} \xi_k \\ \xi_{k+1} \\ \vdots \\ \xi_{k+q-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rq}, k = 0, 1, 2, \ldots, N-q+1$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την (4.122) το διάνυσμα x_k προφανώς ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$Ex_{k+1} = Ax_k \tag{4.149}$$

για $k = 0, 1, 2, ..., N-q+1$, όπου

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & I_r & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{bmatrix} \text{ και } A = \begin{bmatrix} 0 & I_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_r \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{q-1} \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύουμε τώρα το παρακάτω θεώρημα

Θεωρημα 4.9 *Ο πίνακας $A(\sigma)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $\sigma E - A$ έχουν ισόμορφη δομή πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών.*

Απόδειξη. Αρχικά σχηματίζουμε τον πρωτοβάθμιο πίνακα $\sigma E - A$

$$\sigma E - A = \begin{bmatrix} \sigma I_r & -I_r & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \sigma I_r & -I_r \\ A_0 & \cdots & A_{q-2} & \sigma A_q + A_{q-1} \end{bmatrix}$$

και ορίζουμε τους πολυωνυμικούς μονομετρικούς πίνακες

$$U(\sigma) = \begin{bmatrix} -I_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I_r & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -I_r & 0 \\ T_{q-1} & \cdots & T_2 & T_1 & I_r \end{bmatrix} \text{ και } V(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & I_r \\ I_r & \ddots & & 0 & \sigma I_r \\ \sigma I_r & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & I_r & 0 & \sigma^{q-2} I_r \\ \sigma^{q-2} I_r & \cdots & \sigma I_r & I_r & \sigma^{q-1} I_r \end{bmatrix}$$

όπου $T_i = \sigma T_{i-1} + A_{q-i}$, $i = 1, 2, ..., q-1$ με $T_0 = A_q$. Μπορούμε τώρα εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η επόμενη ταυτότητα ισχύει

$$U(\sigma)(\sigma E - A)V(\sigma) = blockdiag\{\underbrace{I_r, I_r, ..., I_r}_{(q-1)\text{ πίνακες}}, A(\sigma)\}$$

Εφόσον οι πίνακες $U(\sigma)$ και $V(\sigma)$ μονομετρικοί είναι προφανές ότι αν $S^C_{A(\sigma)}$ είναι η Smith μορφή του $A(\sigma)$ στο C τότε

$$S^C_{\sigma E-A} = blockdiag\{\underbrace{I_r, I_r, ..., I_r}_{(q-1)\text{ πίνακες}}, S^C_{A(\sigma)}\}$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει ότι οι πίνακες $A(\sigma)$ και $\sigma E - A$ έχουν ισόμορφη δομή πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών.

Αντίστοιχα σε ότι αφορά τη σχέση της δομής στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο του πρωτοβάθμιου πίνακα $\sigma E - A$ και του πολυωνυμικού πίνακα $A(\sigma)$ έχουμε:

Ορίζουμε τους πίνακες

$$U_\infty(\sigma) = \begin{bmatrix} I_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_r & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_r & 0 \\ -W_0 & \cdots & -W_{q-2} & -W_{q-1} & I_r \end{bmatrix} \text{ και } V_\infty(\sigma) = \begin{bmatrix} I_r & \sigma^{-1} & \cdots & \sigma^{-q+2} & \sigma^{-q+1} \\ 0 & I_r & \ddots & \ddots & \sigma^{-q+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma^{-1} & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & I_r & \sigma^{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

όπου $W_i = \sigma^{-i-1}\sum_{m=0}^{i} A_m\sigma^m$. Εύκολα μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι η παρακάτω σχέση ισχύει

$$U_\infty(\sigma)(\sigma E - A)V_\infty(\sigma) = blockdiag\{\underbrace{\sigma I_r, \sigma I_r, ..., \sigma I_r}_{(q-1)\text{ πίνακες}}, \sigma^{-q+1}A(\sigma)\}$$

Επιπλέον είναι προφανές ότι οι κανονικοί ρητοί πίνακες $U_\infty(\sigma), V_\infty(\sigma)$ είναι μονομετρικοί στο άπειρο αφού $\det U_\infty(\infty) = \det V_\infty(\infty) = 1$. Άρα η Smith - McMillan μορφή του $\sigma E - A$ στο $\sigma = \infty$ θα είναι

$$S^\infty_{\sigma E-A} = blockdiag\{\underbrace{\sigma I_r, \sigma I_r, ..., \sigma I_r}_{(q-1)\text{ πίνακες}}, \sigma^{-q+1}S^\infty_{A(\sigma)}\} \tag{4.150}$$

Έστω τώρα ότι η Smith - McMillan μορφή του $A(\sigma)$ είναι

$$S^\infty_{A(\sigma)} = diag\{s^{q_1}, s^{q_2}, \ldots, s^{q_r}\}$$

όπου οι εκθέτες q_i μπορεί να είναι θετικοί ή αρνητικοί ανάλογα με το αν αντιστοιχούν σε πόλους οι μηδενικά στο άπειρο το $A(\sigma)$. Οι τάξεις των στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο του $A(\sigma)$ θα είναι αντίστοιχα

$$\mu_i = q - q_i$$

Αντίστοιχα οι τάξεις των στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο του $sE-A$ ενόψει της (4.150) θα είναι

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_i &= 1-1=0,\ i=1,2,...,r(q-1)\\ \hat{\mu}_i &= 1+q-q_i-1=q-q_i,\ i=r(q-1)+1,...,rq\end{aligned}$$

Προφανώς οι μη τετρημένοι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο των $A(\sigma)$ και $\sigma E-A$ ταυτίζονται. ■

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο:

Θεωρημα 4.10 *Το σύστημα που περιγράφεται από την (4.149) αποτελεί την ισοδύναμη περιγραφή στον γενικευμένο χώρο καταστάσεων της αυτοπαλλίνδρομης παράστασης (4.122), πάνω από τις πεπερασμένες χρονικές στιγμές $k=0,1,2,\dots,N$.*

Απόδειξη. Ο πολυωνυμικός γραμμικός μετασχηματισμός $N(\sigma)$ που απαιτεί η (4.148), όπως εύκολα φαίνεται, από την κατασκευή του x_k είναι

$$N(\sigma)=\begin{bmatrix} I \\ I\sigma \\ \vdots \\ I\sigma^{q-1}\end{bmatrix}$$

αφού μπορουμέ να γράψουμε $x_k = N(\sigma)\xi_k$. Επιπλέον σύμφωνα με το αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος, οι πίνακες $A(\sigma)$ και $\sigma E-A$ έχουν ισόμορφη δομή πεπερασμένων και άπειρων διαιρετών, πράγμα πού σημαίνει ότι $\dim\mathcal{B}_{A(\sigma)}=\dim\mathcal{B}_{\sigma E-A}$. Λαμβάνοντας επίσης υπόψιν το γεγονός ότι κάθε λύση της (4.122) αντιστοιχεί μέσω του $N(\sigma)$ σε μία και μόνο μία λύση της (4.149), συμπεραίνουμε ότι ο $N(\sigma)$ είναι ο ζητούμενος πολυωνυμικός ισομορφισμός. Άρα η (4.149) είναι μια ισοδύναμη περιγραφική μορφή της (4.122). ■

Σημειώνουμε εδώ ότι σε αντίθεση με την θεμελιώδη ισοδυναμία συστημάτων συνεχούς χρόνου [1] που συνεπάγεται ένα ισομορφισμό μεταξύ των μηδενικών (πεπερασμένων και άπειρων) των πολυωνυμικών πινάκων, η παρούσα ισοδυναμία απαιτεί ισομορφισμό μεταξύ των πεπερασμένων και άπειρων διαρετών, οι οποίοι είναι γενικά περισσότεροι σε πλήθος από το αντίστοιχο πλήθος των μηδενικών. Αυτό οφείλεται στο ότι τα υπό εξέταση συστήματα διακριτού χρόνου κινούνται πάνω σε πεπερασμένες χρονικές στιγμές, γεγονός που μας αναγκάζει να τα αντιμετωπίζουμε σαν πρόβληματα συνοριακών συνθηκών όπου λαμβάνουν μέρος αρχικές και τέλικες τιμές των διανυσμάτων ξ_k, x_k. Σαν άμεση συνέπεια, η ισοδύναμη πραγμάτωση σε περιγραφική μορφή μια αυτοπαλλίνδρομης παράστασης διακριτού χρόνου έχει γενικά μεγαλύτερη διάσταση από μια αντίστοιχη συνεχούς χρόνου.

4.6 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε τον χώρο λύσεων ή συμπεριφορά $\mathcal{B}$ συστημάτων διακριτού χρόνου που περιγράφονται από αυτοπαλλίνδρομες εξίσωσεις της μορφής $A(\sigma)\xi_k = 0$, όπου ο $A(\sigma)$ είναι ένας τετράγωνος, κανονικός πολυωνυμικός πίνακας και ξ_k είναι μια ακολουθία διανυσμάτων πάνω από τις πεπερασμένες χρονικές στιγμές $k = 0, 1, 2, .., N$. Αποδείξαμε ότι ο χώρος λύσεων $\mathcal{B}$ είναι διανυσματικός χώρος, διάστασης ίσης με το γινόμενο της διάστασης r του πίνακα $A(\sigma)$ επί τον μέγιστο βαθμό του σ που εμφανίζεται στον πολυωνυμικό πίνακα

Αποδείξαμε επίσης ότι ο χώρος $\mathcal{B}$ μπορεί να αναλυθεί (κατά μη μοναδικό τρόπο) σε ευθύ άθροισμα υποχώρων που περιέχουν αντίστοιχα λύσεις κινούμενες σύμφωνα ή αντίστροφα με την φορά του χρόνου. Η συγκεκριμένη ανάλυση που παρουσιάσαμε εδώ αντιστοιχεί με μία μέγιστη προς τα εμπρός ανάλυση του γενικευμένου χώρου καταστάσεων στην [7] . Επιπλέον εντοπίσαμε μια βάση για τον χώρο λύσεων, χρησιμοποιώντας μια κατασκευή που βασίζεται τόσο στην πεπερασμένη όσο και στην άπειρη φασματική δομή του πίνακα $A(\sigma)$.

Παράλληλα δόθηκε μια γενίκευση της απεικόνισης συνοριακών συνθηκών (boundary mapping equation) που παρουσιάζεται στην [11] , στην περίπτωση ενός συστήματος βαθμού μεγαλύτερου του ένα και δείξαμε ότι μια τέτοια απεικόνιση μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τα πεπερασμένα και άπειρα φασματικά ζεύγη του $A(\sigma)$.

Τέλος παρουσιάστηκε μια μέθοδος κατασκευής ενός ισοδύναμου πρωτοβάθμιου αυτοπαλλίνδρομου μοντέλου που διατηρεί την αλγεβρική δομή πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών του $A(\sigma)$, οπότε και οδηγεί σε ένα περιγραφικό σύστημα με ισόμορφη συμπεριφορά με το αρχικό πολυωνυμικό σύστημα.

4.7 Βιβλιογραφία

[1] A.C. Pugh, E. Antoniou, N. Karampetakis, G. Hayton, ”Fundamental equivalence of

non-regular AR-representations, submitted to Automatica, May 1998.

[2] E. Antoniou, A.I.G. Vardulakis, N. Karampetakis, ”A spectral characterization of the behavior of discrete time AR-representations over a finite time interval”, Kybernetika, vol. 34 (1998), No 5, pp. 555-564.

[3] Gantmacher F.R.,’Matrix Theory’, Chelsea Publishing Company, 1971, New York.

[4] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L., ’Matrix Polynomials’, Academic Press Inc, 1982, New York.

[5] Gohberg I., Kaashoek M.A., Lerer L., Rodman L., ”Common Multiples and Common Divisors of Matrix Polynomials, I. Spectral Method”, Indiana Journal of Math. 30, 1981, 321-356.

[6] Gohberg I., Kaashoek M.A., Lerer L., Rodman L., ”Common Multiples and Common Divisors of Matrix Polynomials, II. VanderMonde and Resultant Matrices”, Linear and Multilinear Algebra, 1982, Vol 12, pp. 159 - 203.

[7] Lewis F. L., ’Descriptor Systems: Decomposition into Forward and Backward Subsystems’, IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-29, No 2, February 1984, pp. 167-170.

[8] Lewis F. L., B.G.Mertzios, ”On the Analysis of Discrete Linear Time-Invariant Singular Systems”, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol 35, No 4, April 1990, pp.506 - 511.

[9] Lewis F. L., ”A Survey of Linear Singular Systems”, Circuits Systems and Signal Processing, Vol 5, No 1, 1986, pp.3 - 36.

[10] Luenberger D.G.,’Dynamic Equations in Descriptor Form’, IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-22, No 3, June 1977, pp. 312-321.

[11] Luenberger D.G., ’Boundary Recursion for Descriptor Variable Systems’, IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-34, No 3, March 1989, pp. 287-292.

[12] Nikoukhah R, Willsky A., Bernard C. Levy, ”Boundary-value descriptor systems: well-posedness, reachability and observability”, Int. J. Control, 1987, Vol 46, 1715 - 1737.

[13] Vardulakis A.I.G., ’Linear Multivariable Control - Algebraic Analysis and Synthesis Methods’, Willey, 1991, New York.

[14] Willems J.C., ’Paradigms and Puzzles in the Theory of Dynamical Systems’, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol 36, No 3, March 1991, pp. 259-294.

Κεφαλαιο 5

Λύσεις ARMA-παραστάσεων

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε συστήματα που περιγράφονται από ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών της μορφής

$$A(\sigma)y_k = B(\sigma)u_k \tag{5.151}$$

όπου σ συμβολίζει τον τελεστή ολίσθησης προς τα εμπρός (Forward Shift Operator), δηλ. $\sigma^i y_k = y_{k+i}$,

$$\begin{array}{c} A(\sigma) = A_0 + A_1\sigma + \ldots + A_q\sigma^q \in \mathbb{R}[\sigma]^{r\times r} \\ B(\sigma) = B_0 + B_1\sigma + \ldots + B_q\sigma^q \in \mathbb{R}[\sigma]^{r\times m} \end{array} \tag{5.152}$$

ο πίνακας $A(\sigma)$ είναι κανονικός πολυωνυμικός (δηλ. $\det A(\sigma) \neq 0$ για σχεδόν όλα τα σ), $y_k : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$ είναι η έξοδος και $u_k : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος. Ακολουθώντας παρόμοιο συμβολισμό με την [17] ονομάζουμε τις εξισώσεις (5.151) μια αυτοπαλλίνδρομη - κινούμενου μέσου (AutoRegressive - Moving Average ή συντομότερα ARMA) παράσταση της συμπεριφοράς $\mathcal{B}$, όπου η συμεριφορά $\mathcal{B}$ του συστήματος ορίζεται σαν

$$\mathcal{B} = \pi_y(\mathcal{B}_f) \tag{5.153}$$

με

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}_f := \{ \left(\begin{array}{cc} y_k & u_k \end{array} \right) : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \,|(5.151) \text{ ικανοποιείται } \forall k \in \mathbb{Z}^+ \} \\ \pi_y : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r \; \pi_y \left(\begin{array}{cc} y_k & u_k \end{array} \right) = y_k \end{array} \tag{5.154}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $A(\sigma) = \sigma E - A \in \mathbb{R}[\sigma]^{r\times r}$ και $B(\sigma) = B \in \mathbb{R}^{r\times m}$ η παράσταση ARMA (5.151) είναι γνωστή ως εξίσωση στον γενικευμένο χώρο καταστάσεων ή σύστημα στην περιγραφική μορφή (Descriptor System), δηλ.

$$Ex_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{5.155}$$

ενώ ειδικότερα στην περίπτωση όπου $E = I$, η εξίσωση (5.155) είναι γνωστή ως εξίσωση στον χώρο των καταστάσεων.

Οι ARMA παραστάσεις της μορφής (5.151) βρίσκουν πληθώρα εφαρμογών στην θεωρία ανάλυσης κυκλωμάτων [13] , στα νευρωνικά δίκτυα [3] , στην οικονομία (μοντέλο Leontieff [10]) και στα συστήματα ισχύος [15] .

Στην περίπτωση που $\det E \neq 0$ η λύση της ARMA - παράστασης (5.155) είναι τετριμένη, ενώ η περίπτωση όπου ο E είναι ιδιάζων, διάφορες τεχνικές έχουν αναπτυχθεί από πολλούς συγγραφείς (βλέπε [2] , [7] , [9] , [11] , [14] , [16] , [12]), για την επίλυση της (5.155).

5.2 Προκαταρκτικά Αποτελέσματα

Θα ασχοληθούμε με την ARMA - παράσταση (5.151) όπου $y_k \in \mathbb{R}^r$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, ..., N$ και η u_k είναι μη-μηδενική για $k = 0, 1, ..., N - q$. Υποθέτουμε ότι ο $A(\sigma)$ είναι κανονικός, δηλ. $\det A(\sigma) \neq 0$ για σχεδόν κάθε σ. Δεδομένων των παραπάνω υποθέσεων για τον $A(\sigma)$ το ανάπτυγμα Laurent του πίνακα $A(\sigma)^{-1}$ στην περιοχή του $\sigma = \infty$ υπάρχει και δίνεται από την σχέση

$$A(\sigma)^{-1} = H_{\hat{q}_r}\sigma^{\hat{q}_r} + H_{\hat{q}_r-1}\sigma^{\hat{q}_r-1} + \ldots, |\sigma| > \rho > 0 \tag{5.156}$$

όπου $\hat{q}_r$ είναι η μέγιστη τάξη των μηδενικών στο $\sigma = \infty$ του πίνακα $A(\sigma)$ και η ακολουθία $\{H_k\}$ είναι γνωστή σαν θεμελιώδης (προς τα εμπρός) πίνακας του συστήματος [4] . Ανάλογα, το ανάπτυγμα Laurent του $A(\sigma)^{-1}$ στην περιοχή του $\sigma = 0$ δίνεται από την σχέση

$$A(\sigma)^{-1} = V_{-\ell}\sigma^{-\ell} + V_{-\ell+1}\sigma^{-\ell+1} + \ldots, |\sigma| < \rho \tag{5.157}$$

όπου η ακολουθία $\{V_k\}$ είναι γνωστή [9] σαν θεμελιώδης (προς τα πίσω) πίνακας του συστήματος.

Το ανάπτυγμα Laurent του $A(\sigma)^{-1}$ στην περιοχή του $\sigma = 0$ στην (5.157) συνδέεται με το ανάπτυγμα Laurent στην περιοχή του $\sigma = \infty$ του αντίστροφου του δυϊκού πίνακα $\tilde{A}(\sigma) = A_0\sigma^q + A_1\sigma^{q-1} + \ldots + A_q$ του $A(\sigma)$. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα:

Λημμα 5.1 [1] *Έστω το ανάπτυγμα Laurent στο άπειρο του* $\tilde{A}(\sigma)^{-1}$

$$\tilde{A}(\sigma)^{-1} = \tilde{H}_f\sigma^f + \tilde{H}_{f-1}\sigma^{f-1} + \ldots, |\sigma| > \rho > 0 \tag{5.158}$$

και έστω ότι η (5.157) δίνει το ανάπτυγμα Laurent στην περιοχή του $\sigma = 0$ *του* $A(\sigma)^{-1}$. *Τότε*

$$q + f = \ell \;\; \textit{και} \;\; V_{-i} = \tilde{H}_{-\ell+f+i} \; i = \ell, \ell-1, .., -1, .. \tag{5.159}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} A(\sigma) = \sigma^q\tilde{A}\left(\tfrac{1}{\sigma}\right) \Leftrightarrow A(\sigma)^{-1} = \sigma^{-q}\tilde{A}\left(\tfrac{1}{\sigma}\right)^{-1} &\overset{(5.158)}{\Leftrightarrow} \\ A(\sigma)^{-1} = \sigma^{-q}\left[\tilde{H}_f\sigma^{-f} + \tilde{H}_{f-1}\sigma^{-f+1} + \cdots\right] & \\ = \tilde{H}_f\sigma^{-q-f} + \tilde{H}_{f-1}\sigma^{-q-f+1} + \cdots & \\ \equiv V_{-\ell}\sigma^{-\mu} + V_{-\ell+1}\sigma^{-\mu+1} + \cdots & \end{aligned} \tag{5.160}$$

Εξισώνοντας τις δυνάμεις του σ στην παραπάνω σχέση αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα του λήμματος ■

Άμεση συνέπεια του παραπάνω λήμματος είναι ότι ο αλγόριθμος τύπου Leverrier στην [4] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό τόσο του προς τα εμπρός, όσο και προς τα πίσω θεμελιώδους πίνακα του συστήματος.Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που συνδέει τις λύσεις της ARMA - παράστασης (5.151) και της δυϊκής της:

$$A_q\tilde{y}_k + A_{q-1}\tilde{y}_{k+1} + \cdots + A_0\tilde{y}_{k+q} = B_q\tilde{u}_k + B_{q-1}\tilde{u}_{k+1} + \cdots + B_0\tilde{u}_{k+q} \tag{5.161}$$

πάνω από το πεπερασμένο σύνολο $k = 0, 1, ..., N$. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε τα παρακάτω:

Θεωρημα 5.2 [1] *(α) Αν $\tilde{y}_k$ είναι μια λύση της (5.161) για κάποια μη-μηδενική είσοδο $\tilde{u}_k$, τότε η ακολουθία $y_k = \tilde{y}_{N-k}$ είναι μια λύση της δυϊκής της εξίσωσης (5.151) για την είσοδο $u_k = \tilde{u}_{N-k}$.*
(β) Αν y_k είναι μια λύση της (5.151) για κάποια μη-μηδενική είσοδο u_k, τότε η ακολουθία $\tilde{y}_k = y_{N-k}$ είναι μια λύση της δυϊκής της εξίσωσης (5.161) για την είσοδο $\tilde{u}_k = u_{N-k}$.

Απόδειξη. (α) Έστω $\tilde{y}_k$ μία λύση της (5.161). Τότε η εξίσωση (5.161) ικανοποιείται από την $\tilde{y}_k$. Θεωρούμε τώρα την εξίσωση (5.151). Αν θέσουμε $y_k = \tilde{y}_{N-k}$ και $u_k = \tilde{u}_{N-k}$ και λάβουμε υπόψιν την σχέση προφανή $y_{k+j} = \tilde{y}_{N-(k+j)}, u_{k+j} = \tilde{u}_{N-(k+j)}, j = 0, 1, .., q$ έχουμε

$$A(\sigma)\tilde{y}_{N-k} = \sum_{i=0}^{q} A_i \tilde{y}_{N-k-i} \overset{(5.161)}{=} \sum_{i=0}^{q} B_i \tilde{u}_{N-k-i} \overset{u_k=\tilde{u}_{N-k}}{=} B(\sigma)\tilde{u}_{N-k} \tag{5.162}$$

(β) Η απόδειξη του δεύτερου μέρους του θεωρήματος είναι ακριβώς ανάλογη. ■

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το γεγονός ότι η προς τα πίσω λύση της εξίσωσης (5.151) μπορεί να υπολογιστεί ως προς τα εμπρός λύση της δυϊκής εξίσωσης (5.161).

5.3 Λύσεις ARMA - παραστάσεων

Για τις λύσεις της εξίσωσης (5.151) μπορούμε να θεωρήσουμε τρείς εκδοχές [9] :

- Λαμβάνοντας υπόψιν τις δεδομένες αρχικές συνθήκες $\{y_0, y_1, ..., y_{q-1}\}$ και επιθυμούμε τον προσδιορισμό της λύσης y_k *προς τα εμπρός* δεδομένης της εισόδου.
- Λαμβάνοντας υπόψιν τις δεδομένες τελικές συμθήκες $\{y_N, y_{N-1}, ..., y_{N-q+1}\}$ και επιθυμούμε τον προσδιορισμό της λύσης y_k *προς τα πίσω* δεδομένης της εισόδου.
- Θεωρώντας την εξίσωση (5.151) απλά σαν μια σχέση εισόδου-εξόδου χωρίς να κάνουμε υποθέσεις για την αιτιότητα. Ζητούμενη είναι η λύση y_k για $k = q, q+1, ..., N-q$ σε σχέση με τα διανύσματα αρχικών-τελικών συνθηκών και δεδομένης της εισόδου στο σύνολο $k = 0, 1, ..., N$. Ονομάζουμε αυτού του είδους την λύση της (5.151) *συμμετρική*.

5.3.1 Προς τα εμπρός λύση της ARMA - παράστασης

Θεωρούμε την ARMA - παράσταση διακριτού χρόνου (5.151) όπου ο πολυωνυμικός πίνακας $A(\sigma)$ είναι κανονικός, δηλ. $\det A(\sigma) \neq 0$ για σχεδόν κάθε σ και το ανάπτυγμα Laurent αυτού στο $\sigma = \infty$. Τότε ισχύει το παρακάτω

Θεωρημα 5.3 [1] *Η προς τα εμπρός λύση (5.151) είναι*

$$\begin{gathered} y_k = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} H_{-k-i} A_j y_{j-i} + \sum_{i=0}^{k+\hat{q}_r} \sum_{j=0}^{q} H_{-k+i} B_j u_{i+j} \\ k = q, q+1, .. \end{gathered} \tag{5.163}$$

Απόδειξη. Εξισώνοντας τις δυνάμεις του σ στην σχέση $A(\sigma) \times A(\sigma)^{-1} = I_r$ έχουμε τις ταυτότητες

$$\sum_{n=0}^{q} A_n H_{i-n} = \delta_i I_r \ \text{ ή } \ \sum_{n=0}^{q} H_{i-n} A_n = \delta_i I_r \tag{5.164}$$

όπου $\delta_i = 0$ για $i \neq 0$ και $\delta_0 = 1$. Αντικαθιστώντας το y_k από την (5.163) στην (5.151) και χρησιμοποιώντας την (5.164) παρατηρούμε ότι η (5.151) ικανοποιείται. ■

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι ARMA - παραστάσεις διακριτού χρόνου δεν έχουν πάντα λύση. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η (5.151) να έχει μια λύση δεδομένων των αρχικών συνθηκών $\{y_0, y_1, ..., y_{q-1}\}$ είναι η (5.151) να ικανοποιείται για $k = 0, 1, .., q-1$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμος 5.4 [1] *Ορίζουμε ως χώρο αποδεκτών αρχικών συνθηκών το σύνολο της (5.151)*

$$\begin{gathered} H_{iu} := \{y_i, u_i \ (i = 0, 1, ..., q-1) : \\ \tilde{A}_1 \begin{bmatrix} H_0 & \cdots & H_{q-1} \\ H_{-1} & \cdots & H_{q-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-q+1} & \cdots & H_0 \end{bmatrix} \tilde{A}_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{q-1} \end{bmatrix} = \\ = \tilde{A}_1 \begin{bmatrix} H_0 & \cdots & H_{\hat{q}_r} & 0 & \cdots & 0 \\ H_{-1} & \cdots & H_{\hat{q}_r-1} & H_{\hat{q}_r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-q+1} & \cdots & H_{\hat{q}_r-q+1} & H_{\hat{q}_r-q+2} & \cdots & H_{\hat{q}_r} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_0 & \cdots & B_q & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_0 & B_1 & \cdots & B_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{2q+\hat{q}_r-1} \end{bmatrix} \} \end{gathered} \tag{5.165}$$

όπου

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q-1} & A_{q-2} & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \tag{5.166}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την σχέση (5.151) για $k = 0, 1, ..., q-1$ και αντικαθιστούμε τις τιμές $y_q, y_{q+1}, ..., y_{2q-1}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.163) και την σχέση (5.164). Τότε οι αρχικές τιμές $\{y_0, y_1, ..., y_{q-1}\}$ ικανοποιούν το σύστημα αν και μόνο αν η (5.165) ικανοποιείται. ■

Όπως βλέπουμε από την (5.163) η λύση της (5.151) υπολογίζεται συναρτήσει των αρχικών συνθηκών $\{y_0, y_1, ..., y_{q-1}\}$ και της ακολουθίας εισόδων του συστήματος. Ένα προφανές μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι για τον υπολογισμό της εξόδου y_k για $k = q, q+1, ..,$ απαιτούνται οι συντελεστές H_j του θεμελιώδους πίνακα του συστήματος. Στην περίπτωση που απαιτείται ο υπολογισμός της y_k για ένα σχετικά μεγάλο σύνολο, π.χ. για $k = q, q+1, ..., 100$, θα χρειαζόμαστε τους πίνακες $H_{-101}, H_{-100}, ..., H_{\hat{q}_r}$, των οποίων ο υπολογισμός απαιτεί αρκετά μεγάλη υπολογιστική προσπάθεια. Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της y_k είναι η χρήση μιας αναδρομικής σχέσης, δηλαδή ο υπολογισμός τυχούσας εξόδου y_k συναρτήσει των προηγούμενων q εξόδων $\{y_{k-1}, y_{k-2}, ..., y_{k-q}\}$ και όχι συναρτήσει των q αρχικών τιμών $\{y_0, y_1, ..., y_{q-1}\}$. Σε αυτή την περίπτωση το πλήθος των συντελεστέστων H_j που απαιτούνται είναι σταθερό και συγκεκριμένο (δηλαδή ανεξάρτητο του k) και συγκεκριμένα $H_{-q}, H_{-q+1}, ..., H_{\hat{q}_r}$.

Πορισμα 5.5 [1] *Η εξίσωση (5.163) είναι ισοδύναμη με την αναδρομική σχέση:*

$$y_k = -\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=0}^{i-1} H_{-i}A_j y_{k-i+j} + \sum_{i=0}^{q+\hat{q}_r}\sum_{j=0}^{q} H_{-q+i}B_j u_{k-q+j+i} \tag{5.167}$$

Απόδειξη. Το σύστημα είναι χρονικά αναλοίωτο, έτσι η σχέση που συνδέει την y_k με τις προηγούμενες q εξόδους $\{y_{k-1}, y_{k-2}, ..., y_{k-q}\}$ θα είναι ίδια με την σχέση που συνδέει την y_q με τα διανύσματα $\{y_{q-1}, y_{q-2}, ..., y_0\}$. Αν αντικαταστήσουμε τα $\{y_q, y_{q-1}, ..., y_0\}$ με $\{y_k, y_{k-1}, ..., y_{k-q}\}$ αντίστοιχα και τις εισόδους $\{u_0, u_1, ..., u_{2q+\hat{q}_r}\}$ με τις $\{u_{k-q}, u_{k-q+1}, ..., u_{k+q+\hat{q}_r}\}$ στην (5.163) παίρνουμε την (5.167). ■

Το πλεονέκτημα της σχέσης (5.167) είναι, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ότι απαιτούναται μόνο $q + \hat{q}_r + 1$ συντελεστές του αναπτύγματος Laurent και συγκεκριμένα οι όροι $\{H_{-q}, H_{-q+1}, ..., H_0, ..., H_{\hat{q}_r}\}$. Αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική όταν απαιτείται ο υπολογισμός της y_k στο σύνολο $k = q, q+1, q+2, ...$, εξαιτίας του γεγονότος ότι ο υπολογισμός των $y_q, y_{q+1}, ...$ γίνεται διαδοχικά σε αντίθεση με την σχέση (5.163) όπου μόνο οι q πρώτες τιμές του y_k απαιτούνται. Ένα δεύτερο πλεονέκτημα της σχέσης (5.167) είναι ότι έχουμε σημαντική μείωση των αριθμητικών σφαλμάτων αποκοπής ή στρογγυλοποίησης κατά τον υπολογισμό των $q + \hat{q}_r + 1$ συντελεστών $\{H_{-q}, H_{-q+1}, ..., H_0, ..., H_{\hat{q}_r}\}$ σε σχέση με τον υπολογισμό των $\{H_{-k}, ..., H_{\hat{q}_r}\}$ στην (5.163).

5.3.2 Προς τα πίσω λύση της ARMA - παράστασης

Θεωρούμε την ARMA - παράσταση (5.151) και το ανάπτυγμα Laurent στην περιοχή του $\sigma = 0$ του θεμελιώδους πίνακα δίνεται στην (5.157). Τότε έχουμε:

Θεωρημα 5.6 [1] *Η προς τα πίσω λύση της (5.151) θα είναι:*

$$y_k = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{i} V_{N-k-i} A_j y_{N-i+j} + \sum_{i=0}^{q+k-N-\ell} \sum_{j=0}^{q} V_{N-k-q-i} B_j u_{N+j-i-q} \tag{5.168}$$

Απόδειξη. Προσδιορίζουμε την προς τα εμπρός λύση της δυϊκής εξίσωσης μέσω της (5.161) και χρησιμοποιούμε το θεώρημα 5.2. ■

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ARMA παράσταση (5.151) να έχει λύση είναι οι τελικές συνθήκες $\{y_N, y_{N-1}, ..., y_{N-q+1}\}$ να ικανοποιεί την (5.151) για $k = N, N-1$, ...,$N - q + 1$. Στην συνέχεια δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμος 5.7 [1] *Ορίζουμε ως χώρο αποδεκτών τελικών συνθηκών της (5.151) το σύνολο:*

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{iu} := \{ & y_i, u_i \ (i = N, N-1, ..., N-q+1) : \\
& \tilde{A}_2 \begin{bmatrix} V_{-q} & \cdots & V_{-2q+1} \\ V_{-q+1} & \cdots & V_{-2q+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{-1} & \cdots & V_{-q} \end{bmatrix} \tilde{A}_2 \begin{bmatrix} y_N \\ y_{N-1} \\ \vdots \\ y_{N-q+1} \end{bmatrix} = \\
= \tilde{A}_2 & \begin{bmatrix} V_{-q} & \cdots & V_{-\ell} & 0 & \cdots & 0 \\ V_{-q+1} & \cdots & V_{-\ell+1} & V_{-\ell} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{-1} & \cdots & V_{-\ell+q-1} & V_{-\ell+q-2} & \cdots & V_{-\ell} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} B_0 & \cdots & B_q & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_0 & B_1 & \cdots & B_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_N \\ u_{N-1} \\ \vdots \\ u_{N-q-\ell+1} \end{bmatrix} \}
\end{aligned} \tag{5.169}$$

όπου

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} A_q & 0 & \cdots & 0 \\ A_{q-1} & A_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_q \end{bmatrix} \tag{5.170}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την εξίσωση (5.151) για $k = N-q, N-q-1, ..., N-2q+1$. Αντικαθιστώντας τα y_{N-q}, y_{N-q-1}, ..., y_{N-2q+1} κάνοντας χρήση του αντίστοιχου τύπου στην (5.168) και χρησιμοποιώντας την (5.164) παίρνουμε τις τελικές συνθήκες $\{y_N, y_{N-1}, ..., y_{N-q+1}\}$ οι οποίες ικανοποιούν το σύστημα αν και μόνο αν η (5.169) ικανοποιείται. ■

Ο προς τα πίσω αναδρομικός τύπος που δίνει την έξοδο συναρτήσει τον q επόμενων τιμών του y_k και της εισόδου δίνεται από το παρακάτω:

Πορισμα 5.8 [1] *Η εξίσωση (5.168) είναι ισοδύναμη με την παρακάτω προς τα πίσω αναδρομική σχέση:*

$$y_k = \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{i} V_{q-i}A_j y_{k+q-i+j} + \sum_{i=0}^{-\ell}\sum_{j=0}^{q} V_{-i}B_j u_{k+j-i} \tag{5.171}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη της περίπτωσης της προς τα εμπρός αναδρομικής σχέσης (5.167). ■

Το πλεονέκτημα του τύπου (5.171) είναι ότι η λύση y_k, απαιτεί την γνώση μόνο των $q+\ell+1$ όρων του θεμελιώδους πίνακα $[V_q, V_{q-1}, ...V_{-\ell}]$.

5.3.3 Συμμετρική λύση της ARMA - παράστασης

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε την (5.151) σαν μια σχέση ανάμεσα στην έξοδο y_k και την είσοδο u_k πάνω από το πεπερασμένο σύνολο $k = 0, 1, ..., N$, όπου το k δεν είναι απαραίτητα χρονική μεταβλητή. Θεωρούμε την ARMA - παράσταση διακριτού χρόνου (5.151) και το ανάπτυγμα Laurent στο άπειρο του θεμελιώδους πίνακα του συστήματος απο την (5.156).

Θεωρημα 5.9 [1] *Η συμμετρική λύση της ARMA-παράστασης (5.151) δίνεται από τον τύπο:*

$$
\begin{aligned}
y_k = &\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} H_{-k-i}A_j\, y_{j-i}+ \\
&+\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{i} H_{N-k-i}A_j y_{N-i+j}+ \\
&+\sum_{i=0}^{N-q}\sum_{j=0}^{q} H_{N-k-q-i}B_j u_{N+j-i-q}
\end{aligned}
\tag{5.172}
$$

υπό την προυπόθεση ότι η παρακάτω συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται

$$
\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_A y_{N-q+1,N} \\ X_{\tilde{A}} y_{0,q-1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} B_N u_{0,N}
\tag{5.173}
$$

όπου

$$
W_{11} = \begin{bmatrix} H_{-q} & H_{-q-1} & \cdots & H_{-2q+1} \\ H_{-q+1} & H_{-q} & \cdots & H_{-2q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-1} & H_{-2} & \cdots & H_{-q} \end{bmatrix}
$$

$$
W_{12} = \begin{bmatrix} H_{-N+q-1} & H_{-N+q-2} & \cdots & H_{-N} \\ H_{-N+q} & H_{-N+q-1} & \cdots & H_{-N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-N+2q-2} & H_{-N+2q-3} & \cdots & H_{-N+q-1} \end{bmatrix}
$$

$$
W_{21} = \begin{bmatrix} H_{N-2q+1} & H_{N-2q} & \cdots & H_{N-3q+2} \\ H_{N-2q+2} & H_{N-2q+1} & \cdots & H_{N-3q+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-q} & H_{N-q-1} & \cdots & H_{N-2q+1} \end{bmatrix}
$$

$$
W_{22} = \begin{bmatrix} H_0 & H_{-1} & \cdots & H_{-q+1} \\ H_1 & H_0 & \cdots & H_{-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{q-1} & H_{q-2} & \cdots & H_0 \end{bmatrix}
\tag{5.174}
$$

$$
X_A = \begin{bmatrix} A_q & A_{q-1} & \cdots & A_1 \\ 0 & A_q & \cdots & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_q \end{bmatrix}
$$

$$
X_{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q-1} & A_{q-2} & \cdots & A_0 \end{bmatrix} ;\ u_{0,N} = \begin{bmatrix} u_N \\ u_{N-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}
$$

$$B_N = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_0 & \cdots & B_{q-1} & B_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_0 & B_1 & \cdots & B_q \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} H_{-q} & H_{-q-1} & \cdots & H_{-N} \\ H_{-q+1} & H_{-q} & \cdots & H_{-N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-1} & H_{-2} & \cdots & H_{-N+q-1} \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} H_{N-2q+1} & H_{N-2q} & \cdots & H_{-q+1} \\ H_{N-2q+2} & H_{N-2q+1} & \cdots & H_{-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-q} & H_{N-q-1} & \cdots & H_0 \end{bmatrix}$$

$$y_{N-q+1,N} = \begin{bmatrix} y_N \\ y_{N-1} \\ \vdots \\ y_{N-q+1} \end{bmatrix} ; \, y_{0,q-1} = \begin{bmatrix} y_{q-1} \\ y_{q-2} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Ονομάζουμε την εξίσωση (5.173) την εξίσωση απεικόνισης των συνοριακών συνθηκών της (5.151).

Απόδειξη. Ξαναγράφουμε την (5.151) στην μορφή

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_q & \cdots & A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_q & A_{q-1} & \cdots & A_0 \end{bmatrix}}_{A_N} \underbrace{\begin{bmatrix} y_N \\ y_{N-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix}}_{y_{0,N}} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} B_q & \cdots & B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_q & B_{q-1} & \cdots & B_0 \end{bmatrix}}_{B_N} \underbrace{\begin{bmatrix} u_N \\ u_{N-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}}_{u_{0,N}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} X_A y_{N-q+1,N} \\ 0 \\ X_{\tilde{A}} y_{0,q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ -A_q & \ddots & -A_0 & | \, B_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & -A_q & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{q,N-q} \\ u_{0,N} \end{bmatrix} \tag{5.175}$$

όπου $y_{q,N-q} = [y_{N-q}^T, ..., y_q^T]^T$. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα δύο μέλη της (5.175) με το πίνακα

$$A_N^r = \begin{bmatrix} H_{-q} & H_{-q-1} & \cdots & H_{-N} \\ H_{-q+1} & H_{-q} & \cdots & H_{-N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-q+N} & H_{-q+N-1} & \cdots & H_0 \end{bmatrix} \tag{5.176}$$

παίρνουμε από τις πρώτες q και τις τελευταίες q εξισώσεις, την σχέση (5.173) ενώ από τις $N - 2q$ μεσαίες εξισώσεις παίρνουμε την (5.172).

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ARMA- παράσταση (5.151) να έχει λύση είναι η αρχικές και τελικές συνθήκες σε συνδυασμό με τις εισόδους να ικανοποιούν την εξίσωση (5.173). Κατά συνέπεια δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμος 5.10 [1] *Ορίζουμε το σύνολο*

$$\begin{gathered} \tilde{H}_{iu} := \{y_{0,q-1}, y_{N-q+1,N} : \\ \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A y_{N-q+1,N} \\ X_{\tilde{A}} y_{0,q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} B_N u_{0,N}\} \end{gathered} \tag{5.177}$$

ως το συμμετρικό χώρο αποδεκτών συνοριακών συνθηκών της (5.151). ■

Η εξίσωση απεικόνισης των συνοριακών συνθηκών (5.173) αντιπροσωπεύει τους περιορισμούς που θέτει το σύστημα στις συνοριακές τιμές $y_{0,q-1}$, $y_{N-q+1,N}$ ώστε το σύστημα να είναι επιλύσιμο. Επιπλέον συνοριακές συνθήκες μπορούν να τεθούν με την μορφή βοηθητικών εξισώσεων της μορφής

$$W_{31} y_{N-q+1,N} + W_{32} y_{0,q-1} = C \tag{5.178}$$

Οι συνοριακές συνήκες που συνδυάζουν τις (5.173), (5.178)

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} W_{11}X_A & W_{12}X_{\tilde{A}} \\ W_{21}X_A & W_{22}X_{\tilde{A}} \\ W_{31} & W_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{N-q+1,N} \\ y_{0,q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 u_{0,N} \\ Z_2 u_{0,N} \\ C \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ZY = \tilde{C} \end{gathered} \tag{5.179}$$

καθορίζουν μονοσήμαντα την λύση ανν ισχύει $ZZ^+\tilde{C} = \tilde{C}$ και ο πίνακας Z έχει πλήρη τάξη στηλών, όπου ο Z^+ συμβολίζει έναν ψευδοαντίστροφο του Z, δηλαδή $Y = Z^+\tilde{C}$.

Άλλες εναλλακτικές μορφές της λύσης (5.172) δίνονται από το παρακάτω πόρισμα

Πορισμα 5.11 [1] *Η συμμετρική λύση (5.172) μπορεί να γραφεί*
ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ (FORWARD-SYMMETRIC)

$$\begin{aligned} y_k = & \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=0}^{i-1} H_{-i}A_j\, y_{k-j-i} + \\ & + \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{i} H_{N-k-i}A_j y_{N-i+j} + \\ & + \sum_{i=0}^{N-k}\sum_{j=0}^{q} H_{N-k-q-i}B_j u_{N+j-i-q} \end{aligned} \tag{5.180}$$

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ (BACKWARD-SYMMETRIC)

$$\begin{aligned} y_k = & \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=i}^{q} H_{-k-i}A_j\, y_{j-i} - \\ & - \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=i+1}^{q} H_{-i}A_j y_{k+j-i} + \\ & + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{q} H_{-i}B_j u_{k+j-i} \end{aligned} \tag{5.181}$$

Απόδειξη. Υποθέτοντας ότι $k = \nu q + \upsilon$ $(N - k = \nu q + \upsilon)$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.164) ή την σχέση (5.151) έχουμε το ζητούμενο. ■

Στην προς τα εμπρός - συμμετρική περίπτωση η λύση y_k δίνεται για το διάστημα $[0, N]$ αλλά η λύση εξαρτάται από τις q τελικές τιμές $\{y_N, y_{N-1}, ..., y_{N-q+1}\}$ και τις προηγούμενες q τιμές $\{y_{k-1}, y_{k-2}, ..., y_{k-q}\}$ σε αντίθεση με την συμμετρική λύση, όπου η λύση εξαρτάται από τις q αρχικκές τιμές $\{y_0, y_1, ..., y_{q-1}\}$. Κατά αυτη την έννοια η λύση είναι τουλάχιστον μερικώς μια προς τα εμπρός αναδρομική σχέση.

Παρόμοια στην προς τα πίσω - συμμετρικη περίπτωση η λύση y_k δίνεται ξανά για το διάστημα $[0, N]$ αλλά αυτή τη φορά εξαρτάται από τις q αρχικές τιμές $\{y_0, y_1, ..., y_{q-1}\}$ και τις q επόμενες τιμές $\{y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_{k+q}\}$ και όχι από τις q τελικές τιμές $\{y_N, y_{N-1}, ..., y_{N-q+1}\}$. Αντίστοιχα η λύση είναι μερικώς μια αναδρομική σχέση προς τα πίσω.

5.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε την λύσης της κανονικής αυτοπαλλίνδρομης (ARMA) παράστασης και προτείνουμε τρείς διαφορετικές λύσεις. Οι λύσεις αυτές διακρίνονται από τον τρόπο θεώρησης της αυτοπαλλίνδρομης εξίσωσης αντίστοιχα, ως προς τα εμπρός αναδρομική σχέση, προς τα πίσω αναδρομική σχέση και ως συμμετρικό συνοριακό πρόβλημα δύο σημείων, οπότε και γίνεται η επιλογη του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος πάνω από το οποίο εξετάζεται η λύση. Οι λύσεις αυτές αποτελούν άμεση γενίκευση των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στην [9] για την ειδική περίπτωση των πρωτοβάθμιων συστημάτων διακτριτού χρόνου (συστήματα σε περιγραφική μορφή - descriptor systems).

5.5 Βιβλιογραφία

[1] E. Antoniou, N. Karampetakis, J. Jones, ”Forward, Backward and Symmetric solutions of discrete time ARMA representations”, to appear in Circuits Systems and Signal Processing.

[2] Campbell S.L., 1980, Singular Systems of Differential Equations,San Francisco:Pitman, 1980

[3] Declaris N. and Rindos A., 1984, Semistate analysis of neural networks in Apysia Californica, Proc. 27th MSCS, pp.686-689.

[4] Fragulis G., Mertzios B. G. and Vardulakis A.I., 1991, Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion, Int.J.Control, Vol.53, pp.431-443.

[5] Jones J., Karampetakis N. and Pugh A.C., Solution of discrete ARMA-Representations via MAPLE., Proceedings of the European Control Conference 1997.

[6] Karampetakis N., Jones J. and Pugh A.C., 1996, Solution of an ARMA-representation via its boundary mapping equation., MTNS’96.

[7] Lewis F. L., 1985, Fundamental, reachability and observability matrices for descriptor systems., IEEE Trans. on Auto. Control, AC-30, 502-505.

[8] Lewis F. L., 1986, A survey of linear singular systems,Circuit Systems Signal Process, 5, 3-36

[9] Lewis F. L. and Mertzios B. G., 1990, On the analysis of discrete linear time-invariant singular systems, IEEE Trans. Auto. Control, 35, 506-511

[10] Luenberger D. G., 1977, Dynamic equations in descriptor form, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-22, pp.312-321.

[11] Luenberger D. G., 1978, Time-invariant descriptor systems,Automatica, Vol.14, 473-

480.

[12] Mertzios B.G. and Lewis F. L., Fundamental matrix of discrete singular systems., Circuit Systems Signal Process, Vol.8, No.3, pp.341-355.

[13] Newcobb R.W., 1981, The semistate description of nonlinear time-variable circuits., IEEE Trans. Circuit Systems, Vol.28, pp.62-71

[14] Nikoukhah R., Willsky A.S. and Levy B., 1987, Boundary-value descriptor systems : well posedness, reachability and observability., Int. J. Control, 46, pp.1715-1737.

[15] Stoot B., 1979, Power system dynamic response calculations,Proc.IEEE, 67, 219-247.

[16] Wilkinson J. H., 1978, Linear differential equations and Kronecker's canonical form, in Recent Advances in Numerical Analysis, C. de Boor and G. Golub (eds.), New York:Academic Press, pp. 231-265.

[17] Willems J. C., 1991, Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems, IEEE Trans. Auto. Control, AC-36, 259-294.

Κεφαλαιο 6

Συμπεράσματα

Τα ιδιάζοντα συστήματα διακριτού χρόνου, σε αντίθεση με αυτά του συνεχούς χρόνου, αποτελούν μια κατηγορία συστημάτων που κατά τη γνώμη μας δεν έχει μελετηθεί επαρκώς. Αυτό οφείλεται κατά ένα μέρος στην ιδιομορφία των συστημάτων αυτών σε σχέση με την μη αιτιατή συμπεριφορά τους, γεγονός που τα καθιστά μη πραγματοποιήσιμα από φυσικής άποψης. Οι ερευνητές στο χώρο των συστημάτων ελέγχου επικεντρώθηκαν κατά κύριο λόγο σε απλά συστήματα διακριτού χρόνου του χώρου των καταστάσεων και κυρίως στην μελέτη αυτών στο πεδίο της συχνότητας. Σε συνδυασμό με τη ραγδαία ανάπτυξη της ψηφιακής τεχνολογίας, η έρευνα αυτή έδωσε πάρα πολλά πρακτικά αποτελέσματα όπως η θεωρία των δειγματοληπτικών συστημάτων (sampled systems). Αυτό είχε σαν συνέπεια τα ιδιάζοντα συστήματα διακριτού χρόνου να μείνουν έξω από τα ενδιαφέροντα της επιστημονικής έρευνας του χώρου, εκτός ίσως από ελάχιστες εξαιρέσεις. Η κυριότερη αφορμή για τη μελέτη συστημάτων αυτού του τύπου ξεκίνησε από το μοντέλο του Leontief στην οικονομία, όπου για πρώτη φορά η μη αντιστρεψιμότητα του συντελεστή του x_{k+1} εμφανίστηκε σε κάποιο πραγματικό σύστημα, ενώ μια επίσης σημαντική ώθηση δόθηκε με αφορμή την εμφάνιση ιδιαζόντων συντελεστών στον εκτεταμένο Χαμιλτονιανό πίνακα σε προβλήματα βέλτιστου ελέγχου. Μια επιπλέον διάσταση στο θέμα δίνεται από το γεγονός ότι είναι πολύ πιθανό η παράμετρος k να μην είναι καν μεταβλητή χρονικού χαρακτήρα, αλλά χωρική (π.χ. σε μοντέλα διάδοσης θερμότητας), που καθιστά την περιγραφική μορφή τον πλέον φυσικό τρόπο μοντελοποίησης.

Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε για την μελέτη των ιδιαζόντων συστημάτων βασίστηκε στην περιγραφή στο πεδίου του χρόνου, αφού το πεδίο της συχνότητας κρίνεται μάλλον ακατάλληλο σε προβλήματα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Αύτο γίνεται προφανές αν κάποιος προσπαθήσει να εφαρμόσει το γνωστό μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ σε περιγραφικά ή γενικότερα σε πολυωνυμικά συστήματα. Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού του x_k, $x(z)$ θα περιέχει γενικά και ένα πολυωνυμικό μέρος το οποίο δεν μπορεί να ερμηνευθεί. Είναι γνωστό ότι ο συντελεστής της k-οστής δυνάμης του z^{-1} στο ανάπτυγμα του $x(z)$ στο άπειρο, ταυτίζεται με την τιμή του x_k. Στην περίπτωση ύπαρξης πολυωνυμικού μέρους στη σειρά αυτή, οι συντελεστές των πολυωνυμικών όρων εκφράζουν τιμές του x_k για $k = 0, -1, -2, \ldots$. Το γεγονός αυτό μπορεί κατα ένα μέρος να ερμηνευθεί από τον αναμενόμενο μη-αιτιατό χαρακτήρα του συστήματος. Παρόλα αυτά μια πιο προσεκτική μελέτη στο πεδίο του χρόνου αποδεικνύει ότι ο μη-αιτιατός χαρακτήρας μπορεί να εκφραστεί μέσα από συνθήκες συμβατότητας των αρχικών τιμών στο $k = 0$ και μόνο. Εξάλλου σε χρονικά αμετάβλητα συστήματα η επιλογή του χρόνου μηδεν είναι αυθαίρετη και γίνεται κατά σύμβαση, ως το σημείο του χρόνου από το οποίο και μετά μελετούμε την εξέλιξη του συστήματος. Οποιαδήποτε αναφορά σε τιμές του x_k για $k = -1, -2, \ldots$ στερείται νοήματος, αφού υποτίθεται ότι όλη η πληροφορία για το παρελθόν του συστήματος συγκεντρώνεται στο x_0. Σημειώστε ωστόσο ότι ο ισχυρισμός αυτός δεν έρχεται σε αντίθεση με τον μη-αιτιατό χαρακτήρα του συστήματος, αφού το σύστημα επιβάλλει περιορισμούς στην επιλογή του x_0. Πολύ περισσότερα προβλήματα παρουσιάζονται όταν εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ περιορίζοντας ταυτόχρονα το χρονικό διάστημα από το $\mathbb{Z}^+$ σε κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αντίθετα με τα παραπάνω που ισχύουν στο διακριτό χρόνο, η μελέτη ιδιαζόντων συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας εφαρμόστηκε με μεγάλη επιτυχία στο συνεχή χρόνο. Πέρα από τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace ως εργαλείο για την μετατροπή διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές, ο μετασχηματισμός ερμηνεύει με μεγάλη επιτυχία ιδιάζοντα προβλήματα συνεχούς χρόνου. Τα συστήματα αυτά εμφανίζουν στην συμπεριφορά τους τις λεγόμενες κρουστικές λύσεις, οι οποίες είναι γραμμικοί συνδυασμοί της γενικευμένης συνάρτησης (κατανομής) $\delta(t)$ του Dirac και των παραγώγων της. Η γενικευμένη συνάρτηση $\delta(t)$, εμπειρικά εκφράζει μια πολύ γρήγορη αιχμή σήματος με ύψος που τείνει στο άπειρο και πλάτος που τείνει στο μηδέν και εμφανίζεται σε ιδιάζοντα συστήματα όταν παραγωγίζονται (με μια γενικευμένη έννοια) ασυνεχή σήματα. Στην πράξη για μια πλήρη τεκμηρίωση των γενικευμένων συναρτήσεων και των παραγώγων ασυνεχών συναρτήσεων, απαιτείται ο κλάδος των μαθηματικών που είναι γνωστός ως λογισμός των κατανομών. Τα ιδιάζοντα συστήματα συνεχούς χρόνου παρουσιάζουν κρουστική συμπεριφορά όταν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι συμβιβαστές με το σύστημα. Οι κρουστικές συναρτήσεις είναι το μέσο για την πολύ γρήγορη μετάβαση της (ψευδο) κατάστασης από την μη συμβιβαστή τιμή $x(0-)$ στην ομαλή του εξέλιξη, δηλ. στην $x(0+)$ και μετά. Αντίθετα με τα συστήματα διακριτού χρόνου φαίνεται ότι τα συστήματα συνεχούς χρόνου έχουν τον τρόπο να "διορθώνουν" τις μη-ομαλές καταστάσεις, μεταπηδώντας πολύ γρήγορα στην ομαλή τους λειτουργία. Με αυτό τον τρόπο αναιρούνται οι επιπτώσεις που θα είχε στην αιτιότητα του συστήματος η πιθανή ύπαρξη μη αποδεκτών αρχικών συνθηκών. Ο μετασχηματισμός Laplace (ειδικότερα ο λεγόμενος $\mathcal{L}_-$) αποδεικνύεται συμβατός με αυτού του είδους τις καταστάσεις, αφού τα πολυωνυμικά μέρη του αναπτύγματος του $x(s)$ (όπου $x(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$) στο άπειρο, εκφράζουν ακριβώς τις αντίστοιχες κρουστικές συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου.

Με βάση τα παραπάνω είναι φανερό ότι η μη-αιτιατή συμπεριφορά είναι δεδομένη σε ένα ιδιάζον σύστημα διακριτού. Στην παρούσα εργασία προσπαθήσαμε να επεκτείνουμε γνωστά αποτελέσματα από την υπάρχουσα θεωρία συστημάτων διακριτού χρόνου για κανονικές περιγραφικές μορφές, δηλαδή συστήματα πρώτου βαθμού. Τα νέα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα κεφάλαια 3,4 και 5 κινούνται στη λογική του εντοπισμού του χώρου λύσεων συνθετότερων μορφών ιδιαζόντων συστημάτων. Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε είναι σχεδόν καθαρά αλγεβρική, ενώ ιδιαίτερο βάρος δόθηκε στο συσχετισμό των δομικών αναλλοίωτων των πινάκων που περιγράφουν τα συστήματα, με την δυναμική τους ερμηνεία.

Ειδικότερα στο κεφάλαιο 3 γενικεύεται η βασική ανάλυση ομογενών περιγραφικών συστημάτων στην μη-κανονική περίπτωση. Επιγραμματικά τα κυριότερα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό είναι τα εξής:

- Επέκταση των εννοιών της επιλυσιμότητας και συνθηκολογησιμότητας και συσχέτιση τους με την δομή ελαχίστων (Kronecker) δεικτών του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα.

- Γενίκευση της εξίσωσης απεικόνισης συνοριακών συνθηκών.
- Εισαγωγή της έννοιας του χώρου λύσεων - πηλίκο.
- Ανάλυση της συμπεριφοράς (χώρου λύσεων) σε σχέση με την δομή πεπερασμένων, άπειρων στοιχειωδών διαιρετών και δεξιών δεικτών του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο διερευνούμε το χώρο λύσεων μιας ομογενούς αυτοπαλλίνδρομης παράστασης. Ειδικότερα:

- Αναλύθηκε η συμπεριφορά του συστήματος σε σχέση με την δομή πεπερασμένων, άπειρων στοιχειωδών διαιρετών του πολυωνυμικού πίνακα που περιγράφει το σύστημα
- Εντοπίστηκε ένας κλειστός τύπος λύσης δεδομένων συνοριακών συνθηκών.
- Επεκτάθηκε η έννοια της εξίσωσης απεικόνισης συνοριακών συνθηκών.
- Παρουσιάστηκε μια μέθοδος εντοπισμού ισοδύναμης περιγραφική μορφής, η οποία έχει ισόμορφη συμπεριφορά με την αυτοπαλλίνδρομη παράσταση.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο επεκτάθηκε η μέθοδος επίλυσης περιγραφικών εξισώσεων με τη χρήση του θεμελιώδους πίνακα, σε μη-ομογενή συστήματα μεγαλύτερου βαθμού που είναι γνωστά ώς αυτοπαλλίνδρομες παραστάσεις κινούμενου μέσου (ARMA models). Τα διάφορα είδη λύσης που παρουσιάστηκαν συνοψίζονται παρακάτω:

- Προς τα εμπρός λύση.
- Προς τα πίσω λύση.
- Συμμετρική λύση.
- Υπολογισμός της εξίσωσης απεικόνισης συνοριακών συνθηκών με τη χρήση του θεμελιώδους πίνακα.
- Παραλλαγές των παραπάνω με αναδρομικότητα προς μια κατεύθυνση.

Τα θέματα που παραμένουν ανοικτά σε σχέση με τα ιδιάζοντα συστήματα διακριτού χρόνου είναι πάρα πολλά και σίγουρα στόχος της παρούσας διατριβής δεν είναι να λυθούν όλα. Εξάλλου το αντικείμενο της παρούσας μελέτης είναι η βασική αλγεβρική ανάλυση των χώρων λύσεων των συστημάτων αυτών. Ενδεικτικά προβλήματα που θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο περαιτέρω ευρενητικής εργασίας είναι:

- Μελέτη της έννοιας ισοδυναμίας που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4, τόσο από πλευράς αλγεβρικών ιδιοτήτων όσο και πιθανή επέκταση της στη μη-τετράγωνη περίπτωση.
- Εντοπισμός ισοδύναμων πρωτοβάθμιων μοντέλων για μη-ομογενή και μη-τετράγωνα συστήματα.
- Ορισμός των εννοιών ελεγξιμότητας/παρατηρησιμότητας σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα και αναζήτηση αλγεβρικών κριτηρίων για τις ιδιότητες αυτές.

Παραρτημα I

Βιβλιογραφία (Συνολική)

[1] E.Antoniou, N. Karampetakis, A.I. Vardulakis, ”A classification of the solutions of non-regular discrete-time descriptor systems”, proceedings of the IEEE - Conference on Decision and Control (CDC 97), December 1997, San Diego, USA.

[2] E. Antoniou, A.I.G. Vardulakis, N. Karampetakis, ”A spectral characterization of the behavior of discrete time AR-representations over a finite time interval”, Proc. of the European Control Conference (ECC 97), Brussels, Belgium, July 1997.

[3] E. Antoniou, A.I.G. Vardulakis, N. Karampetakis, ”A spectral characterization of the behavior of discrete time AR-representations over a finite time interval”, Kybernetika, vol. 34 (1998), No 5, pp. 555-564.

[4] A.C. Pugh, E. Antoniou, N. Karampetakis, G. Hayton, ”Fundamental equivalence of non-regular AR-representations, submitted to Automatica, May 1998.

[5] E. Antoniou, N. Karampetakis, J. Jones, ”Forward, Backward and Symmetric solutions of discrete time ARMA representations”, to appear in Circuits Systems and Signal Processing.

[6] E. Antoniou, N. Karampetakis, J. Jones, ”Forward, Backward and Symmetric solutions of discrete time ARMA representations”, Proc. of the European Control Conference (ECC 97), Brussels, Belgium, July 1997.

[7] Banaszuk A., Kociecki M., Przyluski K.M., ”Kalman Type Decomposition for implicit linear discrete-time systems and its applications”, Int. J. Control, Vol 52, No 5, 1990, pp. 1263-1271.

[8] Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., "Σημειώσεις μαθηματικής θεωρίας συστημάτων", Θεσσαλονικη, 1999.

[9] Βασιλείου Π.Χ.Γ., Τσακλίδης Γ., "Πανεπιστημιακές παραδόσεις στην Αναλυτική θεωρία πινάκων", Υπηρεσια Δημοσιευμάτων ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη, 1992.

[10] Βασιλείου Π.Χ.Γ., Τσακλίδης Γ., "Εφαρμοσμένη θεωρία πινάκων", Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1998.

[11] Bender D.J., Laub A.J., ”The Linear-quadratic Optimal regulator for Descriptor

Systems: Discrete time case”, Automatica, Vol 23, 1987, No 1, pp 71-85.

[12] Bitmead R., Kung S, Anderson B., Kailath T., ”Greatest common divisors via generalized Sylvester and Bezout matrices”, IEEE Trans. Autom. Control, Vol AC-23, No 6, December 1978, pp. 1043-1047.

[13] Campbell S.L., Meyer C.D., JR and N.J. Rose, ”Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients”, SIAM J. Appl. Math., Vol 31, No 3, Nov 1976, pp. 411-425.

[14] Campbell S.L., ”Non regular singular dynamic Leontief Systems”, Econometrica, Vol-47, No 6, November 1977, pp. 1565-1568.

[15] Campbell S.L., Singular Systems of Differential Equations,San Francisco:Pitman, 1980

[16] Campbell S.L., ”Linear Systems of Differential equations with singular coefficients”, SIAM J. Math. Anal. Vol 8, No 6, Nov 1977, pp. 1057-1066.

[17] Christodoulou M.A., Mertzios B.G., ”Realization of singular systems via Markov parameters”, Int. J. Control, Vol 42, No 6, 1985, pp. 1433-1441.

[18] Cobb D., ”Descriptor Variable Systems and Optimal State regulation”, IEEE Trans. Autom. Con., Vol AC-28, No 5, May 1983, pp. 601-611.

[19] Declaris N. and Rindos A., 1984, Semistate analysis of neural networks in Apysia Californica, Proc. 27th MSCS, pp.686-689.

[20] Emami-Naeini A., ”Deatbeat Control of Linear Multivariable generalized state space systems”, IEEE Trans. Autom. Con., Vol AC-37, No 5, May 1992, 648-652.

[21] Fragulis G., Mertzios B. G. and Vardulakis A.I., 1991, Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion, Int.J.Control, Vol.53, pp.431-443.

[22] Gantmacher F.R.,’Matrix Theory’, Chelsea Publishing Company, 1971, New York.

[23] Gray W.S., Verriest E.I., Lewis F.L., ”A Hankel Matrix Approach to singular system realization theory”, Proc. of the 20th Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, Dec 1990, pp. 73-78.

[24] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L., ’Matrix Polynomials’, Academic Press Inc, 1982, New York.

[25] Gohberg I., Kaashoek M.A., Lerer L., Rodman L., ”Common Multiples and Common

Divisors of Matrix Polynomials, I. Spectral Method”, Indiana Journal of Math. 30, 1981, 321-356.

[26] Gohberg I., Kaashoek M.A., Lerer L., Rodman L., ”Common Multiples and Common Divisors of Matrix Polynomials, II. VanderMonde and Resultant Matrices”, Linear and Multilinear Algebra, 1982, Vol 12, pp. 159 - 203.

[27] Ionescu V., Oara C., ”Generalized Discrete time Riccati Theory”, Siam Journal on Control and Optimization, Vol-34, No 2, March 1996, pp. 601-619.

[28] Jones J., Karampetakis N. and Pugh A.C., Solution of discrete ARMA-Representations via MAPLE., Proceedings of the European Control Conference 1997.

[29] Karampetakis N., Jones J. and Pugh A.C., 1996, Solution of an ARMA-representation via its boundary mapping equation., MTNS’96.

[30] Krener A.J., ”Acasual realization theory, Part I: Linear Deterministic Systems”, SIAM J. Control and Optimization, Vol 25, No 3, May 1987, pp. 499-525.

[31] Kuijper M., ”First order representations of Linear systems”, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhauser, Boston, 1994.

[32] Λάκκης Κ., "Άλγεβρα", Εκδόσεις Ζήτη, 4η έκδοση, Θεσσαλονίκη, 1984.

[33] Leontief W., ”The Dynamic Inverse”, in Contributions to Input-Output Analysis, Vol I, ed. by A.P. Carter and A. Brody, Amsterdam, North-Holland, 1970.

[34] Lewis F. L., ”Descriptor Systems: Decomposition into Forward and Backward Subsystems”, IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-29, No 2, February 1984, pp. 167-170.

[35] Lewis F. L., B.G.Mertzios, ”On the Analysis of Discrete Linear Time-Invariant Singular Systems”, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol 35, No 4, April 1990, pp.506 - 511.

[36] Lewis F. L., ”A Survey of Linear Singular Systems”, Circuits Systems and Signal Processing, Vol 5, No 1, 1986, pp.3 - 36.

[37] Lewis F.L., ”A Tutorial on the Geometric Analysis of Linear time-invariant Implicit systems”, Automatica, Vol 28, No 1, 1992, pp 119-137.

[38] Lewis F.L.,”Descriptor Systems: Expanded Descriptor Systems and Markov Parameters”, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-28, No 5, May 1983, pp. 623-

627.

[39] Lewis F. L., 1985, Fundamental, reachability and observability matrices for descriptor systems., IEEE Trans. on Auto. Control, AC-30, 502-505.

[40] Luenberger D.G., ”Dynamic Equations in Descriptor Form”, IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-22, No 3, June 1977, pp. 312-321.

[41] Luenberger D.G., Arbel A., ”Notes and comments on Singular Dynamic Leontief Systems”, Econometrica, Vol-45, No 4, May 1977, pp. 992-995.

[42] Luenberger D. G., 1978, Time-invariant descriptor systems,Automatica, Vol.14, 473-480.

[43] Luenberger D.G., ”Boundary Recursion for Descriptor Variable Systems”, IEEE Trans .Autom. Contr., Vol-34, No 3, March 1989, pp. 287-292.

[44] Mertzios B.G. and Lewis F. L., Fundamental matrix of discrete singular systems., Circuit Systems Signal Process, Vol.8, No.3, pp.341-355.

[45] Μποζαπαλίδης Σ.Μ., "Γραμμική Άλγεβρα", Μέρος Α & Β, Θεσσαλονίκη, 1984.

[46] Newcobb R.W., 1981, The semistate description of nonlinear time-variable circuits., IEEE Trans. Circuit Systems, Vol.28, pp.62-71.

[47] Nikoukhah R, Willsky A., Bernard C. Levy, ”Boundary-value descriptor systems: well-posedness, reachability and observability”, Int. J. Control, 1987, Vol 46, 1715 - 1737.

[48] Oara C., ”Stabilizing Solution to the reverse discrete-time Riccati equation: A matrix pencil approach”, Linear Algebra & Apps, 246, 1996, pp. 113-130.

[49] Pappas T., Laub A.J., Sandel N.R., ”On the numerical solution of the discrete-time Algebraic Riccati equation”, IEEE Trans. Autom. Con., Vol AC-25, No 4, August 1980, pp. 631-641.

[50] Schinnar A.P., ”The Leontief Dynamic Generalized Inverse”, The Quarterly Journal of Economics, November 1978, pp. 641-651.

[51] Stoot B., 1979, Power system dynamic response calculations, Proc.IEEE, 67, 219-247.

[52] Tharp H.S., ”Optimal Pole placement in discrete systems”, IEEE Trans. Autom. Con., Vol 37, No 5, May 1992, pp. 645-648.

[53] Vardulakis A.I.G., ’Linear Multivariable Control - Algebraic Analysis and Synthesis

Methods', Willey, 1991, New York.

[54] Verghese G.C., Levy B.C., Kailath T., "A Generalized State Space for singular systems", IEEE Trans. Autom. Con., Vol AC-26, No 4, August 1981, pp. 811-831.

[55] Wilkinson J. H., 1978, Linear differential equations and Kronecker's canonical form, in Recent Advances in Numerical Analysis, C. de Boor and G. Golub (eds.), New York:Academic Press, pp. 231-265.

[56] Willems J.C., 'Paradigms and Puzzles in the Theory of Dynamical Systems', IEEE Trans. Autom. Contr., Vol 36, No 3, March 1991, pp. 259-294.

[57] Willems J.C., "From time series to Linear system - Part I. Finite dimensional Linear time invariant systems", Automatica, Vol 22, No 5, 1986, pp 561-580.

[58] K-T. Wong, "The eigenvalue problem $\lambda Tx + Sx$", J. Diff. Equations, vol. 16, 1974, pp. 270-281.

[59] Syrmos V.L., Misra P., Aripirala R., "On the discrete generalized Lyapunov equation", Automatica, Vol 31, No 2, 1995, pp. 297-301.

I.1 Σχολιασμός βιβλιογραφίας

Το μαθηματικό υπόβαθρο που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 1 προέρχεται από τις [9] , [10] , [8] , [22] , [24] , [32] , [45] , [53] . Ειδικότερα οι [32] , [45] αποτέλεσαν την αναφορά για τις βασικές αλγεβρικές έννοιες και τη γραμμική άλγεβρα. Τα στοιχεία της θεωρίας πινάκων που παρουσιάστηκαν προέρχονται από τις [9] , [10] , [8] , ενώ τα στοιχεία της θεωρίας πολυωνυμικών και ρητών πινάκων από τις [22] , [24] , [53] .

Η θεωρία κανονικών πρωτοβάθμιων συστημάτων διακριτού χρόνου περιέχεται στις [13] , [14] , [22] , [27] , [31] , [33] , [34] , [35] , [36] , [37] , [38] , [39] , [40] , [41] , [42] , [43] , [44] , [47] , [50] , [58] . Κύριο κίνητρο για την παρούσα έρευνα αποτέλεσαν οι [34] , [35] , [36] , [37] , [38] , [39] , [40] , [41] , [42] , [43] , [44] , [47] όπου αναπτύχθηκαν οι διάφοροι μέθοδοι ανάλυσης κανονικών πρωτοβάθμιων συστημάτων που παρουσιάζονται στο δεύτερο κεφάλαιο. Ειδικότερα στις [40] , [41] , [42] , [43] θεμελιώνονται οι έννοιες της επιλυσιμότητας, συνθηκολογησιμότητας και συνοριακής απεικόνισης καθώς και οι αναδρομικές μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων, ενώ παράλληλα στις [34] , [35] , [36] ,

[37] , [38] , [39] , [47] γίνεται μια πιο συστηματική συσχέτιση των λύσεων με τα δομικά αναλλοίωτα του πίνακα $\sigma E - A$.

Οι αναφορές που περιέχονται στο κεφάλαιο 3 είναι οι [1] , [11] , [12] , [22] , [27] , [31] , [34] , [35] , [36] , [37] , [43] , [47] , [56] , [57] . Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου προέρχονται βασικά από την εργασία [1] . Αξίζει να σημειώσουμε το σημαντικό ρόλο των εργασιών [12] , [43] στα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού. Τα αποτελέσματα της πρώτης βοήθησαν στον καθορισμό της διάστασης του χώρου λύσεων πηλίκο ενώ αυτά της δεύτερης αποτέλεσαν σημείο αφετηρίας για την έρευνα μας.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται αναφορές στις εργασίες [2] , [3] , [4] , [22] , [24] , [25] , [26] , [34] , [35] , [36] , [40] , [43] , [47] , [53] , [56] . Το κεφάλαιο αυτό είναι στην ουσία μια επέκταση των αποτελεσμάτων της [3] (ή της [2]). Στην εν λόγω εργασία παρουσιάστηκαν όλα τα αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των αυτοπαλλίνδρομων παραστάσεων. Τα αποτελέσματα αυτά επεκτάθηκαν με την προσπάθεια εντοπισμού μιας ισοδύναμης περιγραφικής μορφής στην παράγραφο 4.5. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η μέθοδος της παραγράφου 4.5 δεν έχει προηγουμένως δημοσιευθεί.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφέρονται οι [5] , [6] , [19] , [21] , [28] , [29] , [35] , [36] , [39] , [40] , [42] , [47] , [55] , [56] . Κύριο άξονα του κεφαλαίου αποτελεί η εργασία [6] (ή η [5] η οποία έχει γίνει δεκτή για δημοσίευση) όπου παρουσιάστηκε η μέθοδος λύσης της ARMA εξίσωσης με τη χρήση του θεμελιώδους πίνακα. Η βασική ιδέα της λύσης με τη χρήση θεμελιώδη πίνακα προέρχεται από τις [35] , [39] όπου η μέθοδος εφαρμόστηκε για συστήματα πρώτου βαθμού.